اهداء
الى الاخت الفاضلة والزميلة ..
د. منال الخولي
مع أطيب التمنيات
محمد الزنفلي

الإحصاء

وصف وتحليل وتطبيق

في

مجال السياحة والفنادق

الجزء الثاني

دكتور / محمد الزنفلي

٢٠٠٥

البـاب الأول

التوزيع الطبيعي وتطبيقاته

الباب الأول

التوزيع الطبيعي وتطبيقاته

يشتمل هذا الباب على ثلاثة فصول هي : -

الفصل الأول : التوزيع التكراري المعتدل كمدخـــل لـــدراسة التوزيـــع الطبيعي .

الفصل الثانى : دوال التوزيع الطبيعي .

الفصل الثالث : تطبيقات .

الفصل الأول

التوزيع التكراري المعتدل كمدخل لدراسة التوزيع الطبيعي

أولا : الوصف الإحصائي باستخدام التكرارات المطلقة :

١-العرض الجدولي والبياني (المدرج ، المضلع ، المنحنى) .

٢-القياس الإحصائي (النزعة المركزية ، التشـــتت ، الالتـــواء ، التفرطح)

٣-خصائص التوزيع .

ثانيا : الوصف الإحصائي باستخدام التكرارات النسبية (الاحتمال الاحصائي)

١-العرض الجدولي البياني (المدرج ، المضلع ، المنحني)

٢-القياس الإحصائي (النزعة المركزية ، التشـــتت ، الالتـــواء ، التفرطح)

٣-خصائص التوزيع .

أولا : الوصف الإحصائي باستخدام التكرارات المطلقة :

سبق للطالب دراسة التوزيع التكراري الملتوي والمعتدل في الجزء الأول من هذا الكتاب ، وفى الجزء الثاني هذا سيتم تناول التوزيع التكراري المعتدل فقط لكن بصورة أكثر تفصيلا ، ذلك لأن معظم ظواهر الحياة تأخذ شكل التوزيع التكراري المعتدل ، ومن ثم يمثل هذا التوزيع أهمية كبيرة فى الدراسات الإحصائية ، والمثال التالي بمثابة أعادة وكتمهيد للدراسة التفصيلية للتوزيع التكراري المعتدل .

المثـــال

الجدول التالي هو توزيع تكراري معتدل لامتحان ١٢٨ طالب في مادة الإحصاء :

فئات	٠-١٠	١٠-٢٠	٢٠-٣٠	٣٠-٤٠	٤٠-٥٠	٥٠-٦٠	٦٠-٧٠	٧٠-٨٠	المجموع
تكرارات	١	٧	٢١	٣٥	٣٥	٢١	٧	١	١٢٨

والمطلوب :

١-العرض الجدولي والبياني للتوزيع .



٢- قياس النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح .

٣- خصائص التوزيع .

الحـــــل

(١) العرض الجدولي والبياني للتوزيع التكراري المعتدل :

أ - المدرج التكراري المعتدل :

يتضح من العرض الجدولي والبيـــاني التـــاليين شـــكل المـــدرج التكراري المعتدل ويلاحظ ما يلي : -

* أن قواعد المستطيلات متساوية وهي عبارة عن طول الفئــــة ، وأن ارتفاع كل مستطيل عبارة عن تكرار الفئة المناظر ، وقـــد تم التعويض عن طول الفئة بالرقم واحد طالما أن طول الفئــــة ثابت وللحصول على المجموع الكلي للتكرارات .

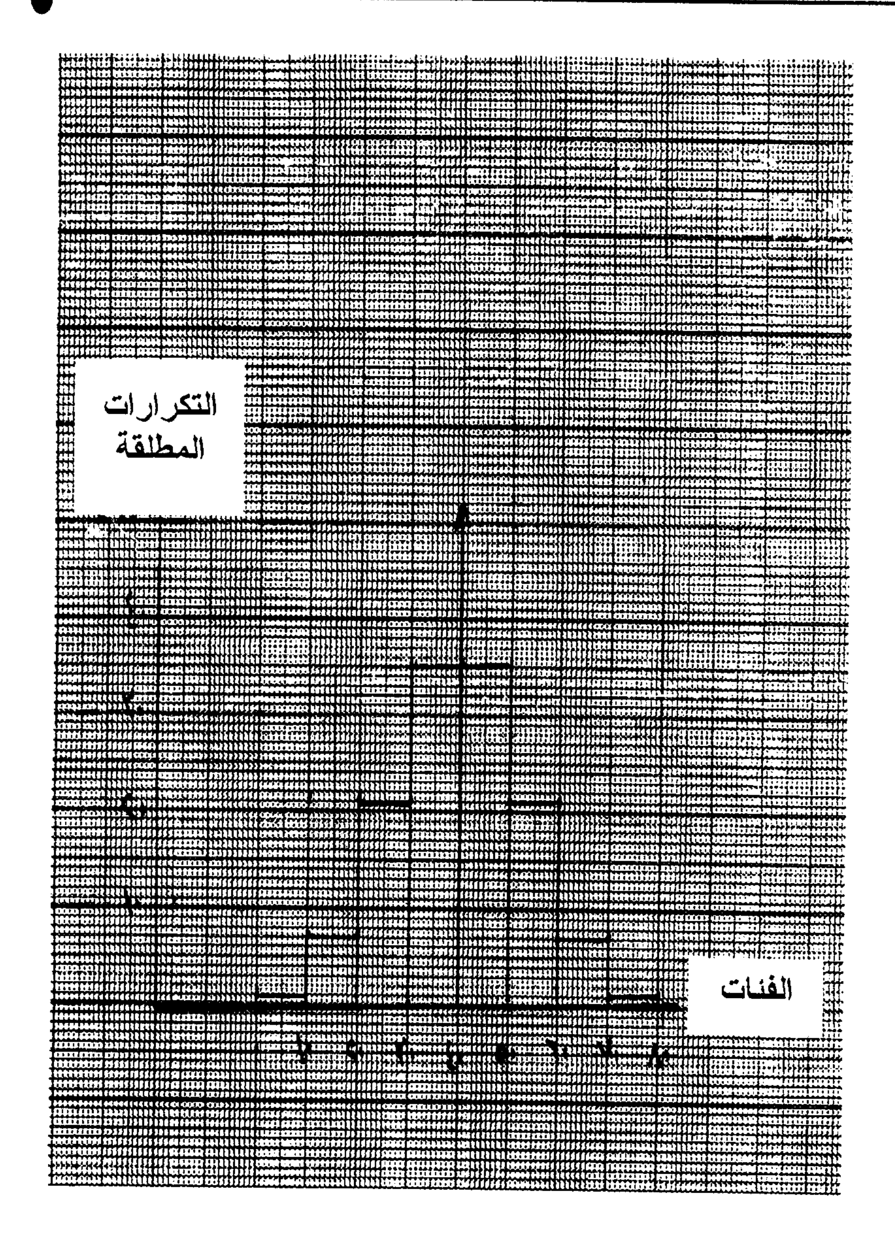
* أن المدرج التكراري المعتدل متماثل حيث أن عدد المستطيلات قبل المنتصف تماثل عدد المستطيلات بعـــد المنتصـــف ، وأن محور التماثل يوازي المحور الرأسي (محور التكرارات) .



العرض الجدولي للمدرج التكراري المعتدل :

الفئات	مساحة المدرج (مساحات المستطيلات)	التكرارات (المساحات) المطلقة
٠ – ١٠	١ × ١	١
١٠ – ٢٠	١ × ٧	٧
٢٠ – ٣٠	١ × ٢١	٢١
٣٠ – ٤٠	١ × ٣٥	٣٥
٤٠ – ٥٠	١ × ٣٥	٣٥
٥٠ – ٦٠	١ × ٢١	٢١
٦٠ – ٧٠	١ × ٧	٧
٧٠ – ٨٠	١ × ١	١
المجموع		١٢٨





المدرج التكراري المعتدل

ب- المضلع التكراري المعتدل :

يتضح من العرض الجدولي والبيـــاني التـــاليين شـــكل المضلـــع التكراري المعتدل ويلاحظ ما يلي :

* أن توزيع المساحة تحت المضلع التكراري المعتـــدل متماثلـــة حيث تماثل شبة المنحرفات والمثلث قبل المنتصف مـــع شـــبه المنحرفات والمثلث بعد المنتصف ، وأن محور التماثل يـــوازي المحور الرأسي (محور التكرارات) .

* أن مجموع مساحات (تكرارات) شبه المنحرف بالإضافة إلـــى مساحة المثلثين يساوي مجموع التكرارات المطلقة .



العرض الجدولي للمضلع التكراري المعتدل :

الفئات	مساحة المضلع (مساحات شبه المنحرف + مساحة المثلثين)	المساحات (التكرارات) المطلقة
-٥ – ٥	مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ١ \times ١$	٠,٥
٥ – ١٥	مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}(١+٧)\times ١$	٤,٠
١٥ – ٢٥	مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}(٧+٢١)\times ١$	١٤,٠
٢٥ – ٣٥	مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}(٢١+٣٥)\times ١$	٢٨,٠
٣٥ – ٤٥	مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}(٣٥+٣٥)\times ١$	٣٥,٠
٤٥ – ٥٥	مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}(٣٥+٢١)\times ١$	٢٨,٠
٥٥ – ٦٥	مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}(٢١+٧)\times ١$	١٤,٠
٦٥ – ٧٥	مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}(١٧+١)\times ١$	٤,٠
٧٥ – ٨٥	مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢} \times ١ \times ١$	٠,٥
المجموع		١٢٨



التكرارات المطلقة

الفئات

التكرارات المطلقة

مراكز الفئات

المضلع التكراري المعتدل

جـ- المنحنى التكراري المعتدل :

يتأتي المنحني التكراري إذا ما زادت عدد نقاط المضلع التكراري لدرجة تصبح معها هذه النقاط متماسة فيتشكل المنحنى، وهنا يصبح مجال المنحنى أي المحور الأفقي على شكل فترات وليس فئات أو مراكز الفئات ، ويسمي المنحني التكراري المعتدل بالمنحني الطبيعي أو التوزيع الطبيعي حيث يمثل معظم الظواهر الطبيعية فى الحياة ، ويتضح هذا المنحني فى العرض البياني التالي .

وقد تم تناول العرض البياني هذا بدون العرض الجدولي والسبب أن ذلك يتطلب استخدام دالة كثافة التوزيع التكراري المعتدل والتي سترد فى الفصول القادمة .

التكرارات المطلقة

مراكز الفئات

التكرارات المطلقة

الفترات

المنحني التكراري المعتدل

(٢) قياس النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح :

يكتمل الوصف الإحصائي للتوزيع إذا ما تم قياس النزعة المركزية للتوزيع وكذا تشتته والتواءه وتفرطحه .

* قياس النزعة المركزية للتوزيع

* المتوسط الحسابي ($\overline{س}$)

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

الفئات	التكرارات (ك)	مراكز الفئات (س)	س ك
٠ – ١٠	١	٥	٥
١٠ – ٢٠	٧	١٥	١٠٥
٢٠ – ٣٠	٢١	٢٥	٥٢٥
٣٠ – ٤٠	٣٥	٣٥	١٢٢٥
٤٠ – ٥٠	٣٥	٤٥	١٥٧٥
٥٠ – ٦٠	٢١	٥٥	١١٥٥
٦٠ – ٧٠	٧	٦٥	٤٥٥
٧٠ – ٨٠	١	٧٥	٧٥
المجموع	١٢٨	/	٥١٢٠

$\because \overline{س} = \frac{مجـ س ك}{مجـ ك}$ $\therefore \overline{س} = \frac{٥١٢٠}{١٢٨} = ٤٠$



* **الوســــيط (ط) :**

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

الفئات	التكرارات (ك)	الحدود العليا للفئات	تكرار متجمع صاعد
(٠ – ١٠)	١	– ١٠	١
(١٠ – ٢٠)	٧	– ٢٠	٨
(٢٠ – ٣٠)	٢١	– ٣٠	٢٩
(٣٠ – ٤٠)	٣٥	– ٤٠	٦٤
(٤٠ – ٥٠)	٣٥	– ٥٠	٩٩
(٥٠ – ٦٠)	٢١	– ٦٠	١٢
(٦٠ – ٧٠)	٧	– ٧٠	١٢٧
(٧٠ – ٨٠)	١	– ٨٠	١٢٨
المجموع	١٢٨	/	/

∵ تكرار الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$ ∴ تكرار الوسيط = $\frac{١٢٨}{٢}$ = ٦٤

، ∵ الفئة الوسيطية هي الفئة التي تقابل تكـــرار الوســـيط مـــن جـــدول المتجمع الصاعد .

∴ الفئة الوسيطية هي (– ٤٠)

، ∵ ط = ب + $\frac{ت_١ \times ل}{ت_١ + ت_٢}$

∴ ط = ٤٠ + $\frac{١٠ \times ٠}{٠ \times ٠}$ = ٤٠

المنوال (م) :

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

الفئات	التكرارات (ك)
(٠ – ١٠)	١
(١٠ – ٢٠)	٧
(٢٠ – ٣٠)	٢١
(٣٠ – ٤٠)	٣٥
(٤٠ – ٥٠)	٣٥
(٥٠ – ٦٠)	٢١
(٦٠ – ٧٠)	٧
(٧٠ – ٨٠)	١
المجموع	١٢٨

∵ الفئة المتوالية هي التي تقابل أكبر تكرار من الجدول التكراري العادي .

∴ الفئة المنوالية هي (٣٠ – ٤٠) أو (٤٠ – ٥٠)

، ∵ م = ب + $\frac{ت_١ \times ل}{ت_١ + ت_٢}$

= ٣٠ + $\frac{١٤ \times ١٠}{١٤ + ٠}$ = ٣٠ + ١٠ = ٤٠

أو م = ٤٠ + $\frac{٠ \times ١٠}{٠ + ١٤}$ = ٤٠ + ٠ = ٤٠



قياس التشتت للتوزيع :

* التباين والانحراف المعياري

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

الفئات	(ك)	س	س ك	$س^2$ ك
٠ – ١٠	١	٥	٥	٢٥
١٠ – ٢٠	٧	١٥	١٠٥	١٥٧٥
٢٠ – ٣٠	٢١	٢٥	٥٢٥	١٣١٢٥
٣٠ – ٤٠	٣٥	٣٥	١٢٢٥	٤٢٨٧٥
٤٠ – ٥٠	٣٥	٤٥	١٥٧٥	٧٠٨٧٥
٥٠ – ٦٠	٢١	٥٥	١١٥٥	٦٣٥٢٥
٦٠ – ٧٠	٧	٦٥	٤٥	٢٩٥٧٥
٧٠ – ٨٠	١	٧٥	٧٥	٥٦٢٥
المجموع	١٢٨	/	٥١٢٠	٢٢٧٢٠٠

$$\therefore ع^2_{\text{التباين}} = \frac{\text{مجـ } س^2 ك}{\text{مجـ } ك} - \left(\frac{\text{مجـ } س ك}{\text{مجـ } ك}\right)^2$$

$$= \frac{٢٢٧٢٠٠}{١٢٨} - \left(\frac{٥١٢٠}{١٢٨}\right)^2$$

$$= ١٧٧٥ - ١٦٠٠ = ١٧٥$$

$$\therefore \text{ع (الانحراف المعياري)} = \sqrt{١٧٥} = ١٣,٢٢٨٨$$



وبقياس الالتواء للتوزيع محل الدراسة باستخدام مقاييس النزعة المركزيـة ومقاييس التشتت الناتجة فارن :

$$\because \text{معامل الالتواء} = \frac{\overline{س} - \text{ط أو م}}{ع}$$

$$\therefore \text{معامل الالتواء} = \frac{٤٠ - ٤٠}{١٣٫٢٢٨} = \text{صفر}$$

∴ التوزيع التكراري محل الدراسة توزيع معتدل (مبادئ الإحصاء) .

<u>الالتواء والتفرطح باستخدام العزوم :</u>

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

الفئات	(ك)	س	$\frac{(س - \overline{س})}{ح}$	ح ك	$ح^2$ك	$ح^3$ ك	$ح^4$ ك
٠ – ١٠	١	٥	٣٥-	٣٥-	١٢٢٥	٤٢٨٧٥-	١٥٠٠٦٢٥
١٠ – ٢٠	٧	١٥	٢٥-	١٧٥-	٤٣٧٥	١٠٩٣٧٥-	٢٧٤٣٧٥
٢٠ – ٣٠	٢١	٢٥	١٥-	٣١٥-	٤٧٢٥	٧٠٨٧٥-	١٠٦٣١٢٥
٣٠ – ٤٠	٣٥	٣٥	٥-	١٧٥-	٨٧٥	٤٣٧٥-	٢١٨٧٥
٤٠ – ٥٠	٣٥	٤٥	٥	١٧٥	٨٧٥	٤٣٧٥	٢١٨٧٥
٥٠ – ٦٠	٢١	٥٥	١٥	٣١٥	٤٧٢٥	٧٠٨٧٥	١٠٦٣١٢٥
٦٠ – ٧٠	٧	٦٥	٢٥	١٧٥	٤٣٧٥	١٠٩٣٧٥	٢٧٣٤٣٧٥
٧٠ – ٨٠	١	٧٥	٣٥	٣٥	١٢٢٥	٤٢٨٧٥	١٥٠٠٦٢٥
المجموع	١٢٨	/	صفر	صفر	٢٢٤٠٠	صفر	١٠٦٤٠٠٠٠



∵ معامل الالتواء $= \frac{م_{٣}^{٢}}{م_{٢}^{٣}}$

، ∵ العزم الثاني (م٢) $= \frac{مجـ ح^{٢} ك}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ح ك}{مجـ ك}\right)^{٢}$

$= \frac{٢٢٤٠٠}{١٢٨} - \left(\frac{صفر}{١٢٨}\right)^{٢}$

= ١٧٥ – صفر

= ١٧٥ * ∴ ع = ١٣,٢٢٨٨

، ∵ العزم الثالث (م٣) $= \frac{مجـ ح^{٣} ك}{مجـ ك} - \left(٣ \times \frac{مجـ ح^{٢} ك}{مجـ ك} \times \frac{مجـ ح ك}{مجـ ك} + ٢\left(\frac{مجـ ح ك}{مجـ ك}\right)^{٢}\right)$

$= \frac{صفر}{١٢٨} - \left(٣ \times \frac{صفر}{١٢٨} \times \frac{٢٢٤٠٠}{١٢٨} + ٢\left(\frac{صفر}{١٢٨}\right)^{٢}\right)$

= صفر – (صفر + صفر)

= صفر

∴معامل الالتواء $= \frac{(٠)^{٢}}{(١٧٥)^{٣}}$ = صفر

∴التوزيع التكراري محل الدراسة توزيع معتدل (مبادئ الاحصاء)

، ∵ معامل التفرطح $= \frac{م_{٤}}{م_{٢}^{٢}}$

* هي نفس النتيجة السابقة لقيمة التباين (العزم الثاني هو التباين) .

∵ العزم الرابع $(م_٤)$ = $\frac{مجـ ح^٤ ك}{مجـ ك} - ٣ \left(\frac{مجـ ح ك}{مجـ ك}\right)^٤ - ٤ \times \frac{مجـ ح ك}{مجـ ك} \times \frac{مجـ ح^٣ ك}{مجـ ك}$

$+ ٦ \left(\frac{مجـ ح ك}{مجـ ك}\right)^٢ \times \frac{مجـ ح^٢ ك}{مجـ ك}$

$= \frac{١٠٦٤٠٠٠٠}{١٢٨} - ٣ \left(\frac{صفر}{١٢٨}\right)^٤ - ٤ \times \frac{صفر}{١٢٨} \times \frac{صفر}{١٢٨}$

= ٨٣١٢٥

∴ معامل التفرطح = $\frac{٨٣١٢٥}{(١٧٥)^٢} = \frac{٨٣١٢٥}{٣٠٦٢٥}$

= ٢,٧١٤٣ ≈ ٣

(٣) خصائص التوزيع :

أ - $\bar{س}$ = ط = م = (٤٠ فى المثال محل الدراسة)

ب- التباين = ١٧٥ ، الانحراف المعياري = ١٣,٢٢٨٨

جـ معامل الالتواء = صفر

ء- معامل التفرطح = ٢,٧١٤٣ ≈ ٣



ثانيا : الوصف الإحصائي باستخدام التكرارات النسبية (الاحتمال الاحصائي) :

١- **العرض الجدولي والبياني** : (المثال محل الدراسة)

الجدول الإحصائي اللازم للمدرج التكراري النسبي المعتدل :

الفئات	التكرار المطلق	التكرار النسبي (الاحتمال الاحصائي)
٠ – ١٠	١	٠,٠٠٨٠
١٠ – ٢٠	٧	٠,٠٥٤٦
٢٠ – ٣٠	٢١	٠,١٦٤٠
٣٠ – ٤٠	٣٥	٠,٢٧٣٤
٤٠ – ٥٠	٣٥	٠,٢٧٣٤
٥٠ – ٦٠	٢١	٠.١٦٤٠
٦٠ – ٧٠	٧	٠,٠٥٤٦
٧٠ – ٨٠	١	٠,٠٠٨٠
المجموع	١٢٨	١

الجدول الإحصائي اللازم للمضلع التكراري النسبي المعتدل :

مراكز الفئات	التكرار المطلق	التكرار النسبي (الاحتمال الاحصائي)
٥	١	٠,٠٠٨٠
١٥	٧	٠,٠٥٤٦
٢٥	٢١	٠,١٦٤٠
٣٥	٣٥	٠,٢٧٣٤
٤٥	٣٥	٠,٢٧٣٤
٤٥	٢١	٠.١٦٤٠
٦٥	٧	٠,٠٥٤٦
٧٥	١	٠,٠٠٨٠
المجموع	١٢٨	١



الجدول الإحصائي اللازم للمنحني التكراري النسبي المعتدل :

الفترات	التكرار المطلق	التكرار النسبي (الاحتمال الإحصائي) ح	ح متجمع صاعد
≥ ١٠	١	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٨٠
≥ ٢٠	٧	٠,٠٥٤٦	٠,٠٦٢٦
≥ ٣٠	٢١	٠,١٦٤٠	٠,٣٢٦٦
≥ ٤٠	٣٥	٠,٢٧٣٤	٠,٥٠٠٠
≥ ٥٠	٣٥	٠,٢٧٣٤	٠,٧٧٣٤
≥ ٦٠	٢١	٠,١٦٤٠	٠,٩٣٧٤
≥ ٧٠	٧	٠,٠٥٤٦	٠,٩٩٢٠
≥ ٨٠	١	٠,٠٠٨٠	١,٠٠٠٠
المجموع	١٢٨	١	/

المدرج التكراري النسبي المعتدل

التكرارات النسبية

الفئات

المضلع التكراري النسبي المعتدل

التكرارات النسبية

مراكز الفئات

المنحنى التكراري النسبي المعتدل

التكرارات النسبية

المتغير متصل



ويتضح من العرض الجدولي والبياني الملاحظات التالية :

أ - أن التكرار النسبي للفئة عبارة عن التكرار المطلق للفئة مقسوما على المجموع الكلي للتكرارات .

ب- أن مجموع التكرارات النسبية يساوي الواحد الصحيح ، وهذه قاعدة لأى توزيع تكراري نسبي .

جـ- أن الأشكال الثلاثة متماثلة ، وأن محور التماثل يوازي المحور الرأسي أي محور التكرارات النسبية ، كما أنه يقسم مساحة الشكل عند المنتصف إلى قسمين متساويين فى المساحة ، وأن كل قسم يساوي ٠,٥ أو ٥٠% من مساحة الشكل والتي تساوي الواحد الصحيح أو المجموع الكلي للتكرارات .

ء - عند رسم الأشكال الثلاثة قد اتبعت نفس الخطوات فى حالة التكرارات المطلقة .

٢- <u>القياس الإحصائي</u> : (المثال محل الدراسة)

إذا تعاملنا مع بيانات التوزيع على أنها تكرارات نسبية فإنه يمكن القياس



الإحصائي للتوزيع كما يلي (سيكتفي بقياس المتوسط الحسابي والانحراف المعياري) :

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

مراكز الفئات (س)	التكرار النسبي أو الاحتمال الاحصائي (ح)	س ح	$س^{٢}$ ح
٥	٠,٠٠٨٠	٠,٠٤٠	٠,٢
١٥	٠,٠٥٤٦	٠,٨١٩	١٢,٢٨٥
٢٥	٠,١٦٤٠	٤,١	١٠٢,٥٠٠
٣٥	٠,٢٧٣٤	٩,٥٦٩	٣٣٤,٩١٥
٤٥	٠,٢٧٣٤	١٢,٣٠٣	٥٥٣,٦٣٥
٤٥	٠,١٦٤٠	٩,٠٢٠	٤٩٦,١٠٠
٦٥	٠,٠٥٤٦	٣,٥٤٦	٢٣٠,٦٨٥
٧٥	٠,٠٠٨٠	٠,٦٠٠	٤٥,٠٠٠
المجموع	١	٤٠	١٧٧٥,٣٢

∵ المتوسط الحسابي ($\bar{س}$) $= \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$

$$= \frac{\text{مجـ س ح}}{\text{مجـ ح}}$$

= مجـ س ح وهذا قانون فى حالة التوزيع الاحتمالي

∴ $\bar{س}$ (U) أي التوقع = ٤٠

، ∵ التباين ($ع^{٢}$) $= \frac{\text{مجـ } س^{٢} \text{ ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}$

$$= \frac{\text{مجـ } س^{٢} \text{ ح}}{\text{مجـ ح}} - \left(\frac{\text{مجـ س ح}}{\text{مجـ ح}}\right)^{٢}$$



$= \text{مجـ س}^{٢} \text{ ح} - (\text{مجـ س ح})^{٢}$ وهذا قانون فى حالـة التوزيع الاحتمالي .

$\therefore \quad ع^{٢} = ١٧٧٥,٣٢ - ١٦٠٠$

$= ١٧٥,٣٢$

$= ١٧٥$

$\therefore \quad ع = ١٣,٢٢٨$

وهذه هي نفس النتائج فى حالة التكرارات المطلقة .

الفصل الثاني

دوال التوزيع الطبيعي

أولا : دالة التوزيع الطبيعي :

١-الشكل الرياضي للدالة .

٢-استخدام الدالة فى إيجاد التوزيع.

٣-القياس الإحصائي للتوزيع الناتج .

٤-خصائص التوزيع الناتج .

ثانيا : دالة التوزيع الطبيعي المعياري :

١- الشكل الرياضي للدالة .

٢-استخدام الدالة فى إيجاد التوزيع.

٣-القياس الإحصائي للتوزيع الناتج .

٤-خصائص التوزيع الناتج .

ثالثا : دالة كثافة التوزيع الطبيعي المعياري :

١-الشكل الرياضي للدالة .

٢-استخدام الدالة فى إيجاد كثافة التوزيع (الاحتمال الإحصائي)

٣-جدول توزيع (ى)



أولا : دالة التوزيع الطبيعي :

١- الشكل الرياضي للدالة :

$$د(س) = \frac{١}{ع\sqrt{٢ط}} \times هـ^{-\frac{(س - \bar{س})^{٢}}{٢ع^{٢}}}$$

حيث :

س : متغير إحصائي يتبع توزيع طبيعي .

د (س) : الارتفاع التكراري النسبي لقيم المتغير س .

$\bar{س}$: المتوسط الحسابي .

ع : الانحراف المعياري .

ط : النسبة التقريبية (٣,١٤١٦)

هـ : اللوغاريتم الطبيعي (٢,٧١٨)

٢ - استخدام الدالة في إيجاد التوزيع :

تفيد دالة التوزيع الطبيعي في أنه يمكن استخدامها في إيجاد التوزيع التكراري لمتغير إحصائي (س) يتبع توزيع طبيعي إذا علم عنه متوسطه الحسابي وانحرافه المعياري . وعلى ذلك إذا ما تم اعتبار أن



المتغير الإحصائي (س) عبارة عن مراكز الفئات في المثال محل الدراسة أي ٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٦٥ ، ٧٥ فإنه يمكن باستخدام هذه الدالة إيجاد التوزيع التكراري لهذا المتغير طالما معلوم أن متوسطه الحسابي ٤٠ ، وانحرافه المعياري ١٣,٢٢٨ ويتطلب ذلك تكوين الجدول الإحصائي اللازم التالي والذي يلاحظ عليه ما يلي :

أ- أن التوزيع التكراري الناتج من الدالة يشبه لحد كبير التوزيع التكواري للبيانات الأصلية .

ب - أن مجموع د (س) يساوي ٠,١ .

جـ - أن د (س) × ١٠ : هو الارتفاع النسبي للمفردة س باعتبارها مركز الفئة مضروبا في طول الفئة ١٠ والناتج هو التكرار النسبي للفئة ومجموعه يساوي الواحد الصحيح ، وهذا يتفق مع خاصية أن مجموع التكرارات النسبية لأي توزيع تكراري يساوى الواحد الصحيح .

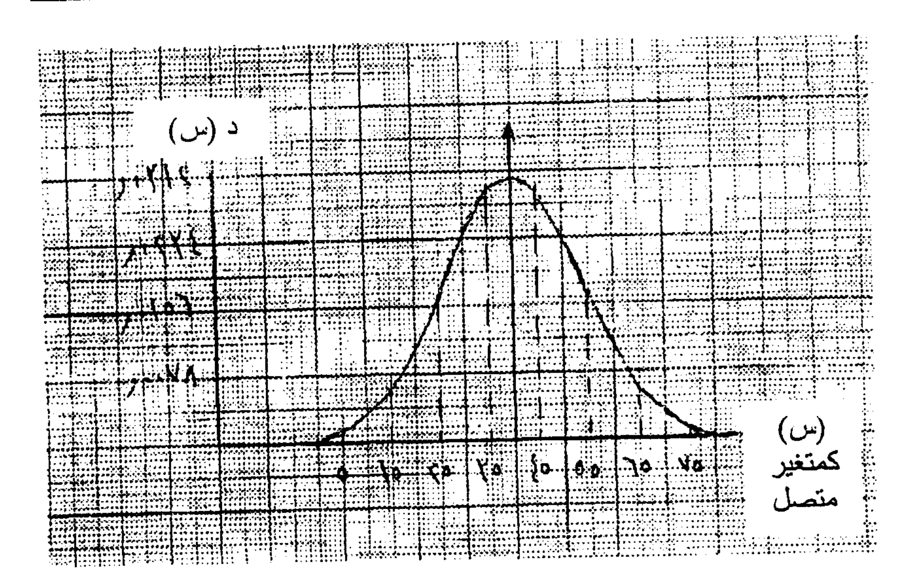


تكوين الجدول الإحصائى اللازم :

س	د (س) = $\frac{١}{ع\sqrt{٢ط}} \times هـ^{-\frac{(س - \bar{س})^{٢}}{٢ع^{٢}}}$	د(س) ×١٠	د(س) ×١٠×١٢٨
٥	د (٥) = ٠,٠٣٠٢ × $\frac{١}{٢,٧١٨^{\frac{١٢٢٥}{٣٥٠}}}$ = ٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٩	١,١٥٢
١٥	د (١٥) = ٠,٠٣٠٢ × $\frac{١}{٢,٧١٨^{\frac{٢٢٥}{٣٥٠}}}$ = ٠,٠٠٥١	٠,٠٥١	٦,٥٢٨
٢٥	د (٢٥) = ٠,٠٣٠٢ × $\frac{١}{٢,٧١٨^{\frac{٢٢٥}{٣٥٠}}}$ = ٠,٠١٥٩	٠,١٥٩	٢٠,٣٥٢
٣٥	د (٣٥) = ٠,٠٣٠٢ × $\frac{١}{٢,٧١٨^{\frac{٢٥}{٣٥٠}}}$ = ٠,٠٢٨١	٠,٢٨١	٣٥,٩٦٨
٤٥	= ٠,٠٢٨١	٠,٢٨١	٣٥,٩٦٨
٥٥	= ٠,٠١٥٩	٠,١٥٩	٢٠,٣٥٢
٦٥	= ٠,٠٠٥١	٠,٠٥١	٦,٥٢٨
٧٥	= ٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٩	١,١٥٢
المجموع	= ٠,١	١	١٢٨



الفئات	التوزيع التكرارى الأصلى					التوزيع التكراري باستخدام دالة التوزيع الطبيعى				
	تكرار مطلق	تكرار نسبى	تكرار متجمع صاعد			تكرار مطلق	تكرار نسبى	تكرار متجمع صاعد		
			≥	مطلق	نسبى			≥	مطلق	نسبى
٠ - ١٠	١	٠,٠٠٨٠	≥ ١٠	١	٠,٠٠٨٠	١,١٥٢	٠,٠٠٩	≥ ١٠	١,١٥٢	٠,٠٠٩
١٠ - ٢٠	٧	٠,٠٥٤٦	≥ ٢٠	٨	٠,٠٦٢٦	٦,٥٢٨	٠,٠٥١	≥ ٢٠	٧,٦٨٠	٠,٠٦٠
٢٠ - ٣٠	٢١	٠,١٦٤٠	≥ ٣٠	٢٩	٠,٣٢٦٦	٢٠,٣٥٢	٠,١٥٩	≥ ٣٠	٢٨,٠٣٢	٠,٢١٩
٣٠ - ٤٠	٣٥	٠,٢٧٣٤	≥ ٤٠	٦٤	٠,٥٠٠٠	٣٥,٩٦٨	٠,٢٨١	≥ ٤٠	٦٤,٠٠٠	٠,٥٠٠
٤٠ - ٥٠	٣٥	٠,٢٧٣٤	≥ ٥٠	٩٩	٠,٧٧٣٤	٣٥,٩٦٨	٠,٢٨١	≥ ٥٠	٩٩,٩٦٨	٠,٧٨١
٥٠ - ٦٠	٢١	٠,١٦٤٠	≥ ٦٠	١٢٠	٠,٩٣٧٤	٢٠,٣٥٢	٠,١٥٩	≥ ٦٠	١٢٠,٣٢٠	٠,٩٤٠
٦٠ - ٧٠	٧	٠,٠٥٤٦	≥ ٧٠	١٢٧	٠,٩٩٢٠	٦,٥٢٨	٠,٠٥١	≥ ٧٠	١٢٦,٨٤٨	٠,٩٩١
٧٠ - ٨٠	١	٠,٠٠٨٠	≥ ٨٠	١٢٨	١,٠٠٠٠	١,١٥٢	٠,٠٠٩	≥ ٨٠	١٢٨,٠٠٠	١,٠٠٠
المجموع	١٢٨	١	/	/	/	١٢٨	١	/	/	/



منحنى دالة التوزيع الطبيعي



توزيع تكراري يساوي الواحد .

ء - أن د (س) × ١٠ × ١٢٨ : هو التكرار النسبي للفئة مضروبا في مجموع التكرارات المطلقة والناتج هو التكرار المطلق للفئة .

هـ - أن منحنى الدالة وهو منحنى طبيعي يشبه لحد كبير المنحنى الطبيعي للبيانات الأصلية .

٣- القياس الإحصائي للتوزيع الناتج :

يتحقق هذا القياس بتكوين الجدول الإحصائي اللازم التالي ثم قياس كل من النزعة المركزية ، والتشتت ، والالتواء ، والتفرطح .

الجدول الإحصائي اللازم :

الفئات	مركز الفئة (س)	د(س) × ١٠ × ١٢٨ (ك)	ح (س - $\bar{س}$)	ح ك	ح٢ ك	ح٣ ك	ح٤ ك
٠ — ١٠	٥	١,١٥٢	٣٥-	٤٠,٣٢٠-	١٤١١,٢	٤٩٣٩٢-	١٧٢٨٧٢٠
١٠-٢٠	١٥	٦,٥٢٨	٢٥-	١٦٣,٢٠-	٤٠٨٠,٠	١٠٢٠٠٠-	٢٥٥٠٠٠٠
٢٠-٣٠	٢٥	٢٠,٣٥٢	١٥-	٣٠٥,٢٨-	٤٥٧٩,٢	٦٨٦٨٨-	١٠٣٠٣٢٠
٣٠-٤٠	٣٥	٣٥,٩٦٨	٥-	١٧٩,٨٤-	٨٩٩,٢	٤٤٩٦-	٢٢٤٨٠
٤٠-٥٠	٤٥	٣٥,٩٦٨	٥	١٧٩,٨٤	٨٩٩,٢	٤٤٩٦	٢٢٤٨٠
٥٠-٦٠	٥٥	٢٠,٣٥٢	١٥	٣٠٥,٢٨	٤٥٧٩,٢	٦٨٦٨٨	١٠٣٠٣٢٠
٦٠-٧٠	٦٥	٦,٥٢٨	٢٥	١٦٣,٢٠	٤٠٨٠,٠٠	١٠٢٠٠٠	٢٥٥٠٠٠٠
٧٠-٨٠	٧٥	١,١٥٢	٣٥	٤٠,٣٢٠	١٤١١,٢	٤٩٣٩٢	١٧٢٨٧٢٠
المجموع	/	١٢٨	صفر	صفر	٢١٩٣٩,٢	صفر	١٠٦٦٣٠٤٠



* قياس النزعة المركزية باستخدام الوسط الحسابي :

$$\because \text{س} = \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \qquad \therefore \text{س} = \frac{\text{صفر}}{١٢٨} = \text{صفر}$$

∴ المتوسط الحسابي = ٤٠

* قياس التشتت باستخدام التباين ($ع^٢$) ، والانحراف المعياري (ع) :

$$\because \text{ع} = \frac{\text{مجـ ح}^٢\text{ ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^٢$$

$$= \frac{٢١٩٣٩,٢}{١٢٨} - \left(\frac{\text{صفر}}{١٢٨}\right)^٢$$

$$= ١٧١,٣٩٨٤$$

$$\therefore \text{ع} = ١٣,٠٩١٩$$

* قياس الالتواء والتفرطح باستخدام العزوم :

$$\because \text{العزم الثالث}(\text{م}_٣) = \frac{\text{مجـ ح}^٣\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(٣ \times \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \times \frac{\text{مجـ ح}^٢\text{ك}}{\text{مجـ ك}} + ٢\left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^٢\right)$$

$$= \frac{\text{صفر}}{١٢٨} - \left(٣ \times \frac{\text{صفر}}{١٢٨} \times \frac{٢١٩٣٩,٢}{١٢٨} + \left(\frac{\text{صفر}}{١٢٨}\right)^٢\right)$$

$$= \text{صفر} - \text{صفر} + \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\because \text{العزم الرابع }(\text{م}_٤) = \frac{\text{مجـ ح}^٤\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - ٣\left(\frac{\text{مجـ ح}^٢\text{ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^٤ - ٤ \times \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \times \frac{\text{مجـ ح}^٣\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$+ ٦ \times \left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^٢ \times \frac{\text{مجـ ح}^٢\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$



$$= \frac{١٠٦٦٣٠٤٠}{١٢٨} - ٣ \frac{صفر}{١٢٨} - ٤ \times \frac{صفر}{١٢٨} \times \frac{صفر}{١٢٨}$$

$$+ ٦ \times \frac{صفر}{١٢٨} \times \frac{٢١٩٣٩,٢}{١٢٨}$$

$$= ٨٣٣٠٥$$

∵ معامل الالتواء $= \frac{م_٣^٢}{م_٢^٣}$

∴ معامل الالتواء $= \frac{صفر}{(١٧١,٣٩٨٤)^٣} =$ صفر

، ∵ معامل التفرطح $= \frac{م_٤}{م_٢^٢}$

∴ معامل التفرطح $= \frac{٨٣٣٠٥}{(١٧١,٣٩٨٤)^٢} = ٢,٨٣٥٦ \approx ٣$

خصائص التوزيع الناتج :

متوسطه الحسابي يساوى ٤٠ ، وتباينه يساوى ١٧١,٤ ومعامل التواءه يساوي الصفر ، ومعامل تفرطحه يساوى ٢,٨٣٥٦ ، لذلك فهو توزيع يشبه لحد كبير التوزيع الأصلي .



ثانيا : دالة التوزيع الطبيعى المعياري :

١ - <u>الشكل الرياضي للدالة :</u>

$$د\,(ى) = \frac{١}{\sqrt{٢ ط}} \times هـ^{\frac{-ى^{٢}}{٢}}$$

حيث :

ى : هي الدرجة المعيارية المناظرة للقيم الأصلية للمتغير الإحصـائي الذى يتبع توزيع طبيعي .

د (ى) : الارتفاع المعياري .

ط : النسبة التقريبية .

هـ : اللوغاريتم الطبيعي .



٢- **استخدام الدالة فى إيجاد التوزيع :**

تفيد دالة التوزيع الطبيعي المعياري فى أنه يمكن استخدامها في إيجاد التوزيع الطبيعي المعياري لمتغير إحصائي (ى) يتبع توزيع طبيعي معياري ، وعلى ذلك إذا ما تم اعتبار أن المتغير الإحصائي (س) والذى يأخذ القيم ٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٥٥ ، ٦٥ ، ٧٥ قد أخذ الدرجات المعيارية المناظرة أي – ٢,٦٤٥٥ ، – ١,٨٨٩٦ ، – ١,١٣٣٨ ، – ٠.٣٧٧٩ ، ٠,٣٧٧٩ ، ١,١٣٣٨ ، ١,٨٨٩٦ ، ٢,٦٤٥٥ فإنه يمكن باستخدام هذه الدالة إيجاد التوزيع الطبيعي المعياري لهذا المتغير ، وهذا يتطلب تكوين الجدول الإحصائي اللازم التالي والذى يلاحظ عليه ما يلي:



تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

س	د (ى)	د(ى) = $\frac{1}{\sqrt{2ط}} \times هـ^{\frac{-ى^2}{2}}$	د(ى)÷ع×١٠ (ك النسبي)	ك النسبى ×١٢٨ (ك المطلق)
٥	-٢,٦٤٥٥	د (-٢,٦٤٥٥) = ٠,٠١٢١ =	٠,٠٠٩١	١,١٥٢
١٥	-١,٨٨٩٦	د(-١,٨٨٩٦) = ٠,٠١٢١ =	٠,٠٥٠٦	٦,٥٢٨
٢٥	-١,١٣٣٨	د(-١,١٣٣٨) = ٠,٠٦٦٩ =	٠,١٥٨٦	٢٠,٣٥٢
٣٥	-٠,٣٧٧٩	د(-٠,٣٧٧٩) = ٠,٢٠٩٨ =	٠,٢٨٠٨	٣٥,٩٦٨
٤٥	٠,٣٧٧٩	د (٠,٣٧٧٩) = ٠,٣٧١٤ =	٠,٢٨٠٨	٣٥,٩٦٨
٥٥	١,١٣٣٨	د (١,١٣٣٨) = ٠,٣٧١٤ =	٠,١٥٨٦	٢٠,٣٥٢
٦٥	١,٨٨٩٦	د(١,٨٨٩٦) = ٠,٢٠٩٨ =	٠,٠٥٠٦	٦,٥٢٨
٧٥	٢,٦٤٥٥	د (٢,٦٤٥٥) = ٠,٠١٢١ =	٠,٠٠٩١	١,١٥٢
المجموع	صفر	١,٣٢٢٨ =	١	١٢٨



* أن ى : هى الدرجة المعيارية المقابلة لمركز الفئة ، فمثلا مركز الفئة ١٥ درجته المعيارية هى :

$$ى = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{١٥ - ٤٠}{١٣,٢٢٨٨} = \frac{- ٢٥}{١٣,٢٢٨٨} = - ١,٨٨٩٦$$

* أن د (ى) : هو الارتفاع المعياري النسبي لمركز الفئة بالدرجة المعيارية ، فمثلا مركز الفئة بالدرجة المعيارية (-١,٨٨٩٦) ارتفاعه المعيارى النسبي هو :

$$د (-١,٨٨٩٦) = ٠,٣٩٨٩ \times \frac{١}{٢,٧١٨^{١,٧٨٥٣}} = \frac{٠,٣٩٨٩}{٥,٩٦٠٣} = ٠,٠٦٦٩$$

* ك النسبي : هو التكرار النسبي ويتأتى من قسمة د (ى) ÷ الانحراف المعياري (ع) ثم ضرب الناتج × طول الفئة (١٠) .

* ك المطلق : هو التكرار المطلق ويتأتى من ضرب التكرار النسبي فى مجموع التكرار المطلق .

* أن مجموع التكرار النسبي يساوى الواحد الصحيح ، وأن مجموع التكرارات المطلقة يساوى مجموع مفردات المتجمع الإحصائي محل الدراسة وهو ١٢٨ .



* أنه إذا قسم د (ى) أي الارتفاع المعياري على الانحراف المعيـاري (ع) لكان الناتج هو الارتفاع النسبي بالقيم الأصلية أى أن :

$$\frac{\text{د (ى)}}{\text{ع}} = \frac{1,3228}{13,228} = 0,1$$

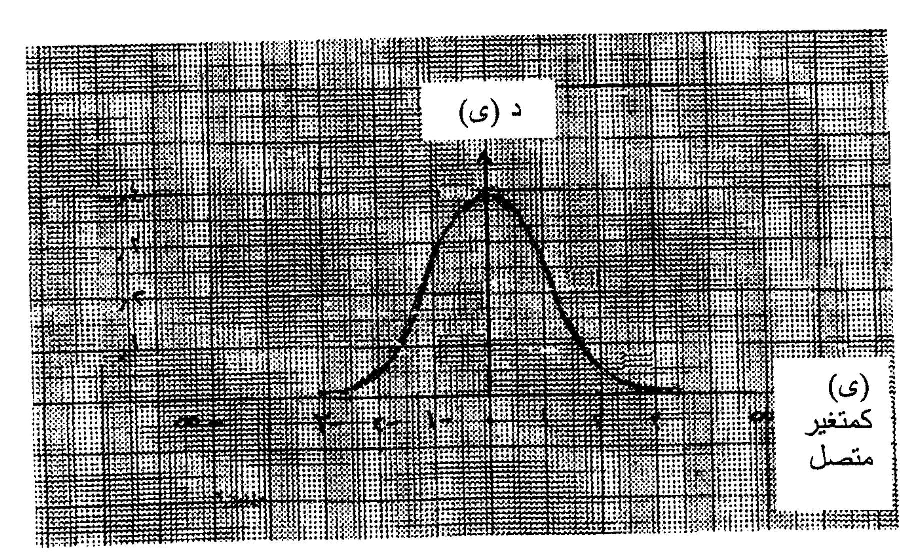
وبالطبع كما سبق إيضاحه إذا ضرب الارتفاع النسبي بـــالقيم الأصليــة فى طول الفئة (١٠ فى مثالنا) لكان الناتج هو التكرار النســبي أي أن :

٠,١ × ١٠ = ١ وهو مجموع التكرار النسبي للتوزيع التكرارى .

* أن التوزيع التكراري الناتج يشبه لحد كبير التوزيع التكراري الأصلــى ويتضح ذلك من الجدول التالى .

* أن محور تماثل المنحنى الطبيعي المعيــاري ينطبــق علــى المحــور الرأسي.

الفئات	التوزيع التكراري الأصلي					التوزيع التكراري باستخدام دالة التوزيع الطبيعي المعياري				
	تكرار	تكرار	تكرار متجمع صاعد			تكرار	تكرار	تكرار متجمع صاعد		
	مطلق	نسبى	≥	مطلق	نسبى	مطلق	نسبى	≥	مطلق	نسبى
٠ – ١٠	١	٠,٠٠٨٠	≥ ١٠	١	٠,٠٠٨٠	١.١٥٢	٠,٠٠٩١	≥ ١٠	١,١٥٢	٠,٠٠٩١
١٠ – ٢٠	٧	٠,٠٥٤٦	≥ ٢٠	٨	٠,٠٦٢٦	٦,٥٢٨	٠,٠٥٠٦	≥ ٢٠	٧,٦٨٠	٠,٠٥٩٧
٢٠ – ٣٠	٢١	٠,١٦٤٠	≥ ٣٠	٢٩	٠,٣٢٦٦	٢٠,٣٥٢	٠,١٥٨٦	≥ ٣٠	٢٨,٠٣٢	٠,٢١٨٣
٣٠ – ٤٠	٣٥	٠,٢٧٣٤	≥ ٤٠	٦٤	٠,٥٠٠٠	٣٥,٩٦٨	٠,٢٨٠٨	≥ ٤٠	٦٤,٠٠٠	٠,٤٩٩١
٤٠ – ٥٠	٣٥	٠,٢٧٣٤	≥ ٥٠	٩٩	٠,٧٧٣٤	٣٥,٩٦٨	٠,٢٨٠٨	≥ ٥٠	٩٩,٩٦٨	٠,٧٧٩٩
٥٠ – ٦٠	٢١	٠,١٦٤٠	≥ ٦٠	١٢٠	٠,٩٣٧٤	٢٠,٣٥٢	٠,١٥٨٦	≥ ٦٠	١٢٠,٣٢٠	٠,٩٣٨٥
٦٠ – ٧٠	٧	٠,٠٥٤٦	≥ ٧٠	١٢٧	٠,٩٩٢٠	٦,٥٢٨	٠,٠٥٠٦	≥ ٧٠	١٢٦,٨٤٨	٠,٩٨٩١
٧٠ – ٨٠	١	٠,٠٠٨٠	≥ ٨٠	١٢٨	١,٠٠٠	١,١٥٢	٠,٠٠٩١	≥ ٨٠	١٢٨,٠٠٠	٠,٩٩٨٢
المجموع	١٢٨	١	/	/	/	١٢٨	١	/	/	/



منحنى دالة التوزيع الطبيعي المعياري



٣- القياس الإحصائي للتوزيع الناتج :

يتحقق هذا القياس بتكوين الجدول الإحصائي اللازم التالى ثم القياسي الكامل من النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح .

الجدول الإحصائي اللازم :

مركز الفئة بالدرجة المعيارية (ى)	التكرارات النسبية (ك)	ى ك	$ى^2$ ك	$ى^3$ ك	$ى^4$ ك
-٣,٤٠١٤	٠,٠٠٠٩	-٠,٠٠٣١	٠,٠١٠٤١	-٠,٠٣٥٤	٠,١٢٠٥
-٢,٦٤٥٥	٠,٠٠٩١	-٠,٠٢٤١	٠,٠٦٣٧	-٠,١٦٨٥	٠,٤٤٥٧
-١,٨٨٩٦	٠,٠٥٠٦	-٠,٠٩٥٦	٠,١٨٠٧	-٠,٣٤١٤	٠,٦٤٥١
-١,١٣٣٨	٠,١٥٨٦	-٠,١٧٩٨	٠,٢٠٣٩	-٠,٢٣١٢	٠,٢٦٢١
-٠,٣٧٧٩	٠,٢٨٠٨	-٠,١٠٦١	٠,٠٤٠١	-٠,٠١٥٢	٠,٠٠٥٧
٠,٣٧٧٩	٠,٢٨٠٨	٠,١٠٦١	٠,٠٤٠١	٠,٠١٥٢	٠,٠٠٥٧
١,١٣٣٨	٠,١٥٨٦	٠,١٧٩٨	٠,٢٠٣٩	٠,٢٣١٢	٠,٢٦٢١
١,٨٨٩٦	٠,٠٥٠٦	٠,١٩٥٦	٠,١٨٠٧	٠,٣٤١٤	٠,٦٤٥١
٢,٦٤٥٥٠	٠,٠٠٩١	٠,٠٢٤١	٠,٠٦٣٧	٠,١٦٨٥	٠,٤٤٥٧
٣,٤٠١٤	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٣١	٠,٠١٠٤	٠,٠٣٥٤	٠,١٢٠٥
صفر	١	صفر	١	صفر	٣



* قياس النزعة المركزية باستخدام الوسط الحسابي ($\bar{\text{س}}$) :

$$\because \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ى ك}}{\text{مجـ ك}} \qquad \therefore \bar{\text{س}} = \frac{\text{صفر}}{١} = \text{صفر}$$

* قياس التشتت باستخدام التباين (ع^{٢}) والانحراف المعياري (ع) :

$$\because \text{ع}^{٢} = \frac{\text{مجـ ى}^{٢}\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ى ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١}{١} - \left(\frac{\text{صفر}}{١}\right)^{٢}$$

$$= ١$$

$$\therefore \text{ع} = ١$$

* قياس الالتواء والتفرطح باستخدام العزوم :

$$\because \text{م}_{٣} = \frac{\text{مجـ ح}^{٣}\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(٣ \times \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \times \frac{\text{مجـ ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مجـ ك}} + ٢\left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}\right)$$

$$= \frac{\text{صفر}}{١} - \left(٣ \times \frac{\text{صفر}}{١} \times \frac{١}{١} + ٢ \times \frac{\text{صفر}}{١}\right) = \text{صفر}$$

$$\because \text{م}_{٤} = \frac{\text{مجـ ح}^{٤}\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - ٣\left(\frac{\text{مجـ ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٤} - ٤ \times \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \times \frac{\text{مجـ ح}^{٣}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$+ ٦\left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢} \times \frac{\text{مجـ ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٣}{١} - ٣ \times \text{صفر} - ٤ \times \text{صفر} + ٦ \times \text{صفر}$$

$$= ٣$$

∵ معامل الالتواء = $\frac{م_3^2}{م_2^3}$

∴ معامل الالتواء = $\frac{صفر}{١}$ = صفر

، ∵ معامل التفرطح = $\frac{م_4}{م_2^2}$

∴ معامل التفرطح = $\frac{٣}{١}$ = ٣

٤- <u>خصائص التوزيع الناتج :</u>

أ- هو توزيع متوسطه الحسابي يساوي **الصفر** وتباينه يساوي **الواحد** الصحيح، ومعامل التواءه يساوي **الصفر** ومعامل تفرطحه يساوي ٣

ب- أن التوزيع الطبيعي المعياري أقل تشتتا (أكثر تجانسا) من التوزيع الطبيعي ومن التوزيع التكراري المعتدل ، ولذلك فهو يشبه الناقوس

جـ- أن أقصى ارتفاع معياري يبلغ ٠,٣٩٨٩ ويقع عند المتوسط الحسابي الصفر ، كما أن الارتفاعات المعيارية الأخرى تتوزع حول الأقصى ارتفاع معياري هذا بصوره متماثلة ، وتوجد جداول خاصة تبين الارتفاعات المعيارية المناظرة للدرجات المعيارية وذلك بدلا من إيجادها عن طريق دالة التوزيع الطبيعي المعياري ، ويتصفح هذه الجداول فيما يلي :



جدول توزيع الارتفاعات المعيارية للتوزيع الطبيعي المعياري :

ى	د (ى)	ى	د (ى)	ى	د (ى)	ى	د (ى)
٣,٧-	٠,٠٠٠٤	١,٤-	٠,١٤٩٧٣	٠,٩	٠,٢٦٦٠٩	٣,٢	٠,٠٠٢٤٠
٣,٦-	٠,٠٠٠٦	١,٣-	٠,١٧١٣٧	١,٠	٠,٢٤١٩٧	٣.٣	٠.٠٠١٧
٣,٥-	٠,٠٠٠٩	١,٢-	٠,١٩٤١٩	١.١	٠,٢١٧٨٥	٣,٤	٠,٠٠١٢
٣,٤-	٠,٠٠١٢	١.١-	٠,٢١٧٨٥	١,٢	٠,١٩٤١٩	٣,٥	٠,٠٠٠٩
٣.٣-	٠,٠٠١٧	١,٠-	٠,٢٤١٩٧	١,٣	٠,١٧١٣٧	٣,٦	٠,٠٠٠٦
٣,٢-	٠,٠٠٢٤٠	٠,٩-	٠.٢٦٦٠٩	١,٤	٠,١٤٩٧٣	٣,٧	٠,٠٠٠٤
٣,١-	٠,٠٠٣٣٠	٠,٨-	٠,٢٨٩٦٩	١,٥	٠,١٢٩٥٢		
٣,٠-	٠,٠٠٤٤٠	٠,٧-	٠,٣١٢٢٥	١,٦	٠,١١٠٩٢		
٢,٩-	٠,٠٠٥٩٥	٠,٦-	٠,٣٣٣٢٢	١,٧	٠,٠٩٤٠٥		
٢,٨-	٠,٠٠٧٩٢	٠,٥-	٠,٣٥٢٠٧	١,٨	٠,٠٧٨٩٥		
٢,٧-	٠,٠١٠٤٢	٠,٤-	٠,٣٦٨٢٧	١,٩	٠,٦٥٦٢		
٢,٦-	٠,٠١٣٥٨	٠,٣-	٠,٣٨١٣٩	٢,٠	٠,٠٥٣٩٩		
٢,٥-	٠,٠١٧٥٣	٠,٢-	٠,٣٩١٠٤	٢,١	٠,٠٤٣٩٨		
٢,٤-	٠,٠٢٢٣٩	٠,١-	٠,٣٩٦٩٥	٢.٢	٠,٠٣٥٤٧		
٢,٣-	٠,٢٨٣٣	٠	٠,٣٩٨٩٤	٢,٣	٠,٠٢٨٣٣		
٢.٢-	٠,٠٣٥٤٧	٠,١	٠,٣٩٦٩٥	٢,٤	٠,٠٢٢٣٩		
٢,١-	٠,٤٣٩٨	٠,٢	٠,٣٩١٠٤	٢,٥	٠,٠١٧٥٣		
٢,٠-	٠,٠٥٣٩٩	٠,٣	٠,٣٨١٣٩	٢,٦	٠,٠١٣٥٨		
١,٩-	٠,٦٥٦٢	٠,٤	٠,٣٦٨٢٧	٢,٧	٠,٠١٠٤٢		
١,٨-	٠,٠٧٨٩٥	٠,٥	٠,٣٥٢٠٧	٢,٨	٠,٠٠٧٩٢		
١,٧-	٠,٠٩٤٠٥	٠,٦	٠,٣٣٣٢٢	٢,٩	٠,٠٠٥٩٥		
١,٦-	٠,١١٠٩٢	٠,٧	٠,٣١٢٢٥	٣,٠	٠,٠٠٤٤٠		
١,٥-	٠,١٢٩٥٢	٠,٨	٠,٣٨٩٦٩	٣,١	٠,٠٠٣٣٠		



ثالثا : دالة كثافة التوزيع الطبيعي المعياري :

١ – الشكل الرياضى للدالة :

$$ح = \int_{-\infty}^{ى} د(ى) \cdot ء ى$$

حيث :

ح : الاحتمال الإحصائي (التكرار النسبي)

$\int_{-\infty}^{ى}$: التكامل لدالة التوزيع الطبيعي المعياري للفترة – ∞ ، ى

ولما كان منحنى دالة التوزيع الطبيعي المعياري عبارة عن منحنى أسى فإن إجراء التكامل* لدالة هذا المنحنى أمر يخرج عن نطاقه كتب الإحصاء ، لذلك توجد جداول خاصة لإيجاد قيمة الاحتمال الإحصائي للمتغير (ى) خلال الفترة المعيارية [– ∞ ، ى] وهذا ما يوضحه الجدول التالي ويعرف بجدول توزيع (ى) :

توزيع كثافة دالة التوزيع الطبيعي المعياري

* يجرى التكامل لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى وضع أى منحنى الدالة والمحور الأفقي وذلك فترة ٤-٨,١ إلى المحور الأفقي

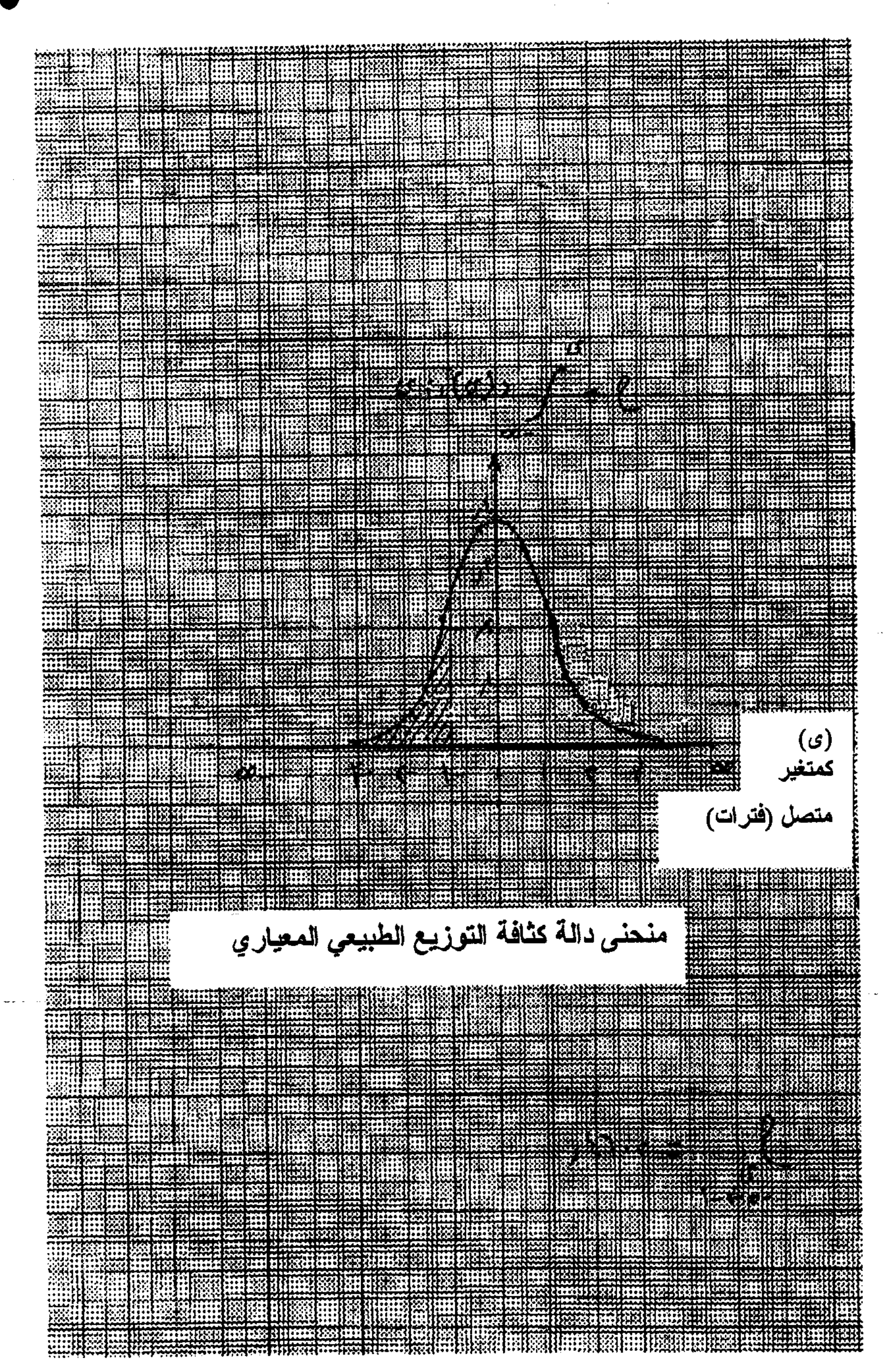
$$ح = \int_{-\infty}^{ى} د(ى)\,.\,ءى$$

-∞ ٣- ٢- ١- ٠ ١ ٢ ٣ ∞ ى

جدول توزيع ى

ى	ح	ى	ح	ى	ح	ى	ح
-٣,٧	٠,٠٠٠١	-١,٤	٠,٠٨٠٨	٠,٩	٠,٨١٥٩	٣,٢	٠,٩٩٩٣
-٣,٦	٠,٠٠٠٢	-١,٣	٠,٠٩٦٨	١,٠	٠,٨٤١٣	٣.٣	٠,٩٩٩٥
-٣,٥	٠,٠٠٠٢	-١,٢	٠,١١٥١	١.١	٠,٨٦٤٣	٣,٤	٠,٩٩٩٧
-٣,٤	٠,٠٠٠٣	-١.١	٠,١٣٥٧	١,٢	٠,٨٨٤٩	٣,٥	٠,٩٩٩٨
-٣.٣	٠,٠٠٠٥	-١,٠	٠,١٥٨٧	١,٣	٠,٩٠٣٢	٣,٦	٠,٩٩٩٨
-٣,٢	٠,٠٠٠٧	-٠,٩	٠,١٨٤١	١,٤	٠.٩١٩٢	٣,٧	٠,٩٩٩٩
-٣,١	٠,٠٠١٠	-٠,٨	٠,٢١١٩	١,٥	٠,٩٣٣٢	∞	١,٠٠٠٠
-٣,٠	٠,٠٠١٣	-٠,٧	٠,٢٤٢٠	١,٦	٠,٩٤٥٢		
-٢,٩	٠,٠٠١٩	-٠,٦	٠,٢٧٤٣	١,٧	٠,٩٥٥٤		
-٢,٨	٠,٠٠٢٦	-٠,٥	٠,٣٠٨٥	١,٨	٠,٩٦٤١		
-٢,٧	٠,٠٠٢٥	-٠,٤	٠,٣٤٤٦	١,٩	٠,٩٧١٣		
-٢,٦	٠,٠٠٤٧	-٠,٣	٠,٣٨٢١	٢,٠	٠,٩٧٧٢		
-٢.٥	٠,٠٠٦٢	-٠,٢	٠,٤٢٠٧	٢,١	٠,٩٨٢١		
-٢,٤	٠,٠٠٨٢	-٠,١	٠,٤٦٠٢	٢.٢	٠,٩٨٦١		
-٢,٣	٠,٠١٠٧	صفر	٠,٥٠٠٠	٢,٣	٠,٩٨٩٣		
-٢.٢	٠,١٢٩	٠,١	٠,٥٣٩٨	٢,٤	٠,٩٩١٨		
-٢,١	٠,١٧٩	٠,٢	٠,٥٧٩٣	٢,٥	٠.٩٩٣٨		
-٢,٠	٠,٠٢٢٨	٠,٣	٠,٦١٧٩	٢,٦	٠,٩٩٥٣		
-١,٩	٠,٠٢٨٧	٠,٤	٠,٦٥٥٤	٢,٧	٠,٩٩٦٥		
-١,٨	٠,٠٣٥٩	٠,٥	٠,٦٩١٥	٢,٨	٠,٩٩٧٥		
-١,٧	٠,٤٤٦	٠,٦	٠,٧٢٥٧	٢,٩	٠,٩٩٨١		
-١,٦	٠,٠٥٤٨	٠,٧	٠,٧٥٨٠	٣,٠	٠,٩٩٨٧		
-١,٥	٠,٠٦٦٨	٠,٨	٠,٧٨٨١	٣,١	٠,٩٩٩٠		





منحنى دالة كثافة التوزيع الطبيعي المعياري

ملاحظـــات :

١-أن منحنى دالة كثافة التوزيع الطبيعي المعياري يشبه منحنى دالـة التوزيع الطبيعي المعياري .

٢-أن منحنى دالة الكثافة يبين المساحة تحت المنحنى أي التوزيـــع التكراري النسبي أي الاحتمال الإحصـــائي ، فمثــلا الاحتمــال الإحصائي (ح) للمتغــير (ى) خــلال الفــترة] - ∞ ، - ١] يساوى ٠,٤٦٠٢ وذلك بالكشف فى جدول توزيع ى .

٣-الأمثلة التالية توضح كيفية إيجاد المساحة تحــت المنحنـــى فـــى الحالات المختلفة للمتغير ى .

مثــــال ١

أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري للمتغــير (ى) خــلال الفترة - ∞ ، - ٣

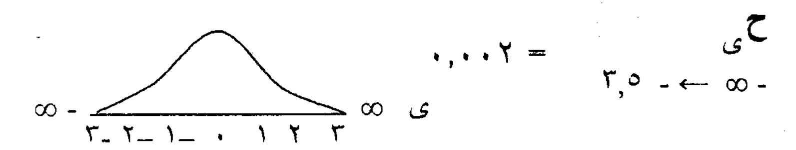
الحــــل

ح ى ∞ ← - ٣ = ٠,٠٠١٣

مثـــــــال٢

أوجد كثافة المتغير (ى) خلال الفترة – ∞ ، – ٣,٥

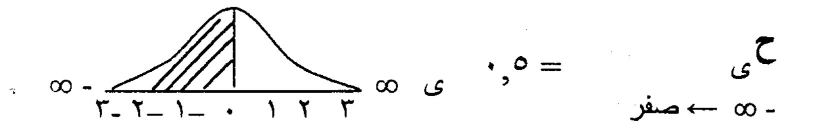
الحــل



مثـــال٣

أوجد الإحتمال الإحصائي للمتغير (ى) خلال الفترة –∞ ، صفر

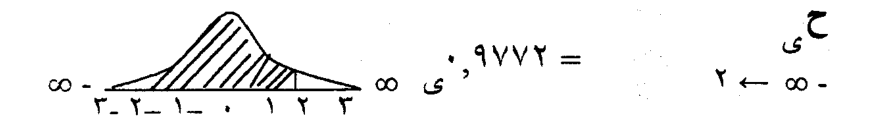
الحــل



مثـــال٤

أوجد الاحتمال الإحصائي للمتغير (ى) خلال الفترة - ∞ ، ٢

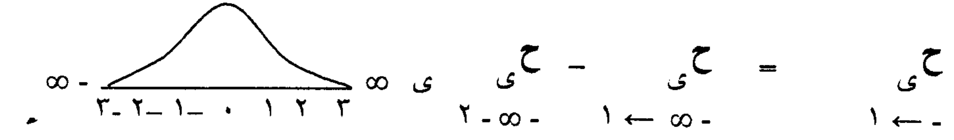
الحـــل



مثـــال ٥

أوجد الاحتمال الإحصائي للمتغير (ى) خلال الفترة – ٢ ، ١

الحـــل



ح ى (- ← ١) = ح ى (-∞ ← ١) − ح ى (-∞ - ٢)

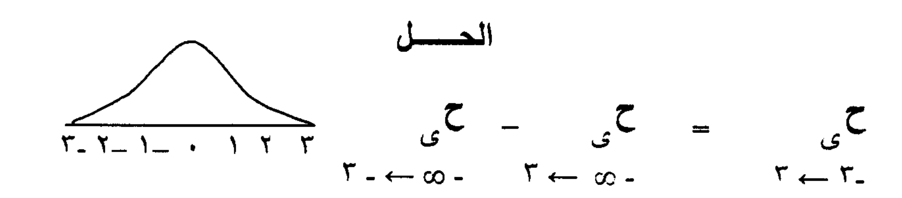
= ٠,١٥٨٧ − ٠,٠٢٢٨

= ٠,١٣٥٥

مثـــال ٦

أوجد الاحتمال الإحصائي للمتغير (ى) خلال الفترة –٣ ، ٣

الحـــل



ح ى (٣- ← ٣) = ح ى (-∞ ← ٣) − ح ى (-∞ ← -٣)

= ٩٩٨٧ − ٠,٠٠١٣

= ٠,٩٩٧٤

ملحوظة : ما قيمة المساحة الباقية وكيف تتوزع ؟



الفصل الثالث

تطبيقات

مثال : إذا كان توزيع درجات امتحان ١٠٠٠ طالب فى مادة الإحصـــاء يتبع توزيع طبيعي متوسطه ٥١ درجة وانحرافه المعياري ٨ درجــات .

فالمطلوب :

أوجد عدد الطلبة الذين تنحصر درجاتهم بين ٤٥ ، ٧٠ درجة .

الحـــل

نتبع الخطوات التالية :

١- تحويل الدرجات الطبيعية إلى درجات معيارية .

٢- استخدام منحنى دالة كثافة التوزيع الطبيعي المعيــاري وجــدول توزيع ى فى إيجاد الاحتمال الإحصائي .

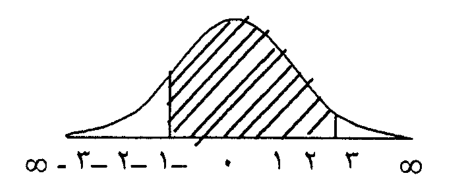
$$\because ى = \frac{س - \overline{س}}{ع}$$

، ∵ س = ٥١ ∴ ى عندها = $\frac{٥١-٥١}{٨}$ = صفر



، ∵ س = ٤٥ ∴ ى عندها = $\frac{٤٥-٥١}{٨}$ = - ٠,٧٥

، ∵ س = ٧٠ ∴ ى عندها = $\frac{٧٠-٥١}{٨}$ = ٢.٣٧٥



حساب المساحة المظللة :

ح(ى-٠,٧٥←٢,٣٧٥)=ح(ى-∞ ← ٢,٣٧٥)-ح(ى -∞ ← -٠,٧٥)

= ٠,٩٩١٦ - ٠,٢٢٦٩

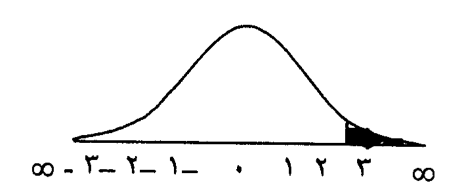
= ٧٦٥ طالب

مثال٢ : إذا كان توزيع أطول مجموعة كبيرة من الطلبة يتبع توزيع طبيعي متوسطه ١٦٠سم ، وانحرافه المعياري ٥سم ، فالمطلوب أوجد احتمال الحصول على طالب طوله أطول من ١٧٥ سم .

الحـــــل

$\because$ ى = $\frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$

، $\because$ س = ١٧٥ $\therefore$ ى عندها = $\frac{١٧٥-١٦٠}{٥}$ = ٣



حساب المساحة المظللة :

ح (ى٣← ∞) = ح (ى - ∞ ← ∞) - ح (ى - ∞ ← ٣)

= ١ - ٠,٩٩٨٧

= ٠,٠٠١٣

= $\frac{١}{٧٦٩}$



أن الاحتمال الإحصائى هو ٠,٠٠١٣ ويعنى أن كل ٧٦٩ طالب يتم اختيارهم عشوائيا نتوقع أن نجد بينهم طالبا واحدا طوله ١٧٥ سم أو أطول من ١٧٥سم .

مثال٣ : إذا كان توزيع درجات اختبار ٤٠٠ عامل فى مجال السياحة والفنادق يتبع توزيع معتدل متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٠ .

والمطلوب :

١-فى حالة تنظيم دورة تدريبية للعاملين الحاصلين على ٤٥ درجة فأقل فما عدد هؤلاء العاملين

٢-فى حالة توزيع شهادات استثمارية قيمة الشهادة ١٠٠ جنيه للعاملين الحاصلين على ٨٠ درجة فأكثر فما تكلفة هذه الشهادات .

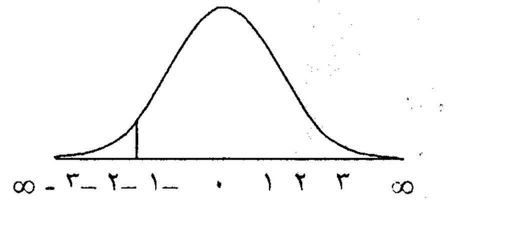
الحـــل

١- $\because$ ى = $\frac{\text{س} - \text{س}}{\text{ع}}$

، $\because$ س = ٦٠ $\therefore$ ى عندها = $\frac{٦٠ - ٦٠}{١٠}$ = صفر

، $\because$ س = ٤٥ $\therefore$ ى عندها = $\frac{٤٥ - ٦٠}{١٠}$ = ١,٥





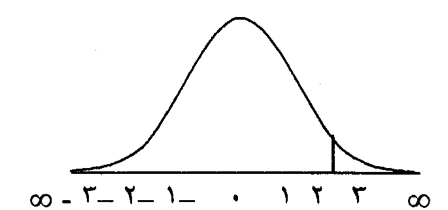
ح (ى - ∞ ← - ١,٥) = ٠,٠٦٦٨

∴ عدد هؤلاء العاملين = ٠,٠٦٦٨ × ٤٠٠

= ٢٦,٧٢ = ٢٧ عامل

، ∵ ى = $\frac{س - \bar{س}}{ع}$

س = ٨٠ ∴ ى عندها = $\frac{٨٠ - ٦٠}{١٠}$ = ٢



حساب المساحة المظللة :

ح (ى ٢ ← ∞) = ح (- ∞ ← ∞) - ح (- ∞ ← ٢)

= ١ - ٠,٩٧٧٢

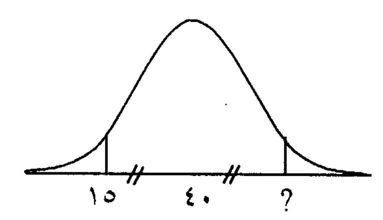
= ٠,٠٢٢٨



∴ عدد هؤلاء العاملين = ٠,٢٢٨ × ٤٠٠ = ٩,١٢ = ١٠ عامل

∴ تكلفة شهادات الاستثمار = ١٠ × ١٠٠ = ١٠٠٠ جنيه

مثال ٤ : الشكل البياني التالي هو توزيع تكراري معتدل لمجتمع إحصائي ما متوسطه ٤٠ درجة ، وانحرافه المعياري ١٢,٧٥٥ درجة .



والمطلوب :

١-أوجد قيمة الدرجة الطبيعية س عند علامة الاستفهام على المحور الأفقي .

٢-حول هذا التوزيع الطبيعي إلى توزيع معياري بالمعطيات الموجودة مستعينا بالرسم البياني مرة أخرى .

٣-إذا علمت أن احتمال ٠ ≤ ى ≤ ١,٩٦ = ٤٧,٥% فأوجد التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع .



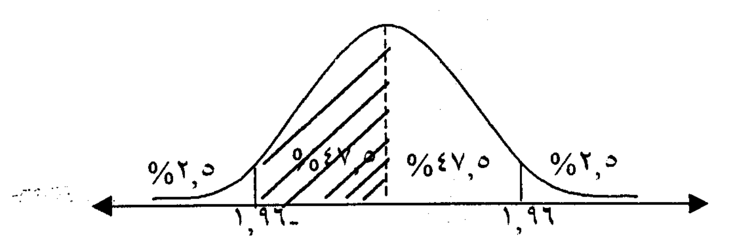
٤-إذا كان المجتمع الإحصائي هذا هو توزيع لمرتبـــات ٤٠٠ عامل فى شركة سياحية ، فما عـــدد العـــاملين الذيـــن تنحصـــر مرتباتهم فى الفترة (١٥ – ٤٠) .

٥-أوجد التوزيع التكراري لهذه المرتبات .

الحـــــــل

١- قيمة س = ٦٥ درجة

٢ ، ٣ التوزيع الطبيعي المعياري وتوزيعه الإحتمالى :



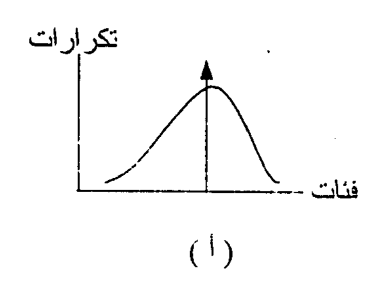
٤- عدد هؤلاء العاملين = ٤٧,٥% × ٤٠٠ = ١٩٠ عامل

٥- التوزيع التكراري لهذه المرتبات :

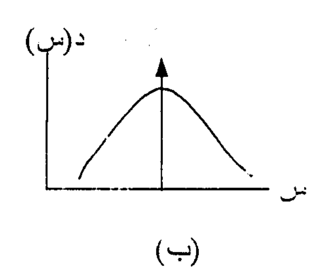
فئات	(٠-١٥)	(١٥-٤٠)	(٤٠-٦٥)	(٦٥-)	المجموع
تكرارات	١٠	١٩٠	١٩٠	١٠	٤٠

مثال٥ : الأشكال التالية هي لتوزيع طبيعي فما الفرق بينها ؟

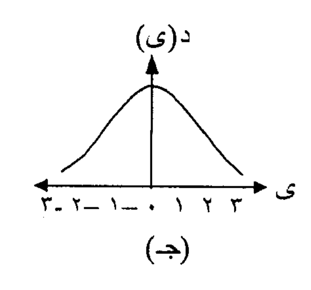




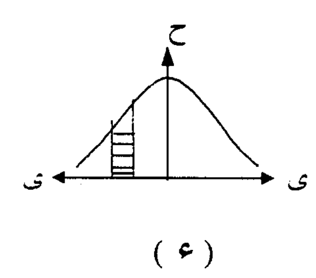
(أ)



(ب)



(جـ)



(٤)

الحـــــل

(أ) توزيع طبيعي بالبيانات الأصلية

(ب) توزيع طبيعي وفقا لدالة التوزيع الطبيعي

$$\text{د (س)} = \frac{1}{\text{ع}\sqrt{2\,\text{ط}}} \times \text{هـ}^{\frac{-(\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}}{2\,\text{ع}^{2}}}$$

(جـ) توزيع طبيعي وفقا لدالة التوزيع الطبيعي المعياري

$$\text{د (س)} = \frac{1}{\sqrt{2\,\text{ط}}} \times \text{هـ}^{\frac{-\text{ى}^{2}}{2}}$$

(٤) توزيع طبيعي وفقا لدالة كثافة التوزيع الطبيعي المعياري

$$\text{ح} = \int_{-\infty}^{\text{ى}} \text{د (ى)} \,.\, \text{٤ ى} \,.$$

الباب الثاني

التوزيعات العينية وتطبيقاتها

الباب الثانى

التوزيعات العينية وتطبيقاتها

يشتمل هذا الباب على الفصول التالية : -

تمهـــيد :

الفصل الأول : توزيع متوسطات عينات المجتمع واستخدامه فى تقديـــر (μ) .

الفصل الثانى : توزيع نسب عينات المجتمع واســـتخدامه فـــى تقديـــر (B) .

الفصل الثالث : توزيع متغير ذات الحدين (نجاح وفشل) واســـتخدامه فى تقدير احتمال وقوع النجاح فى المجتمع .



التمهـــيد :

يعبر المجتمع الإحصائي عن القيم الأصليـــة لمفـــردات المتغـــير الإحصائي محل الدراسة ، كما أنه الإطار الذى يضم كل العينات المكونـــة له ، فهو يمثل المجموعة الشاملة للموضوع محل الدراسة ، أمـــا العينـــة فهى بعض مفردات المجتمع الإحصائي وتمثل مجموعة جزئية منه .

مثـــــال

مجتمع إحصائي يتكون من ٥ مفردات هـى ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠
والمطلوب : حساب عدد العينات المكونة لهذا المجتمع إذا كان حجم العينة ٢ مفردة وذلك فى حالة السحب مع عدم الإعادة وفى حالة الســحب مـع الإعادة* .

الحـــــل

فى حالة السحب مع الإعادة (بإرجاع)

مجموع عدد عينات المجتمع = $ن^{ن}$

---

* يترتب على عملية السحب مع الإعادة أو عدم الإعادة ثبات أو عدم ثبات فراغ المجتمع وفى ذلك تأثير على تحديد مجموع عدد عينات المجتمع .



حيث :

ن : هى حجم المجتمع ، ن : هى حجم العينة .

∴ مجموع عدد عينات المجتمع محل الدراسة = ٥ ٢ = ٢٥ عينة

وبيانات العينات = { (٢،٢) ، (٢،٤) ، (٢،٦) ، (٢،٨) ، (٢،١٠)
(٤،٢) ، (٤،٤) ، (٤،٦) ، (٤،٨) ، (٤،١٠)
(٦،٢) ، (٦،٤) ، (٦،٦) ، (٦،٨) ، (٦،١٠)
(٨،٢) ، (٨،٤) ، (٨،٦) ، (٨،٨) ، (٨،١٠)
(١٠،٢) ، (١٠،٤) ، (١٠،٦) ، (١٠،٨) ، (١٠،١٠) }

فى حالة السحب مع عدم الإعادة (بدون ارجاع)

- مجموع عدد عينات المجتمع = ن ق ر

- ∴ مجموع عدد عينات المجتمع محل الدراسة = ٥ق٢ = ١٠

وبيانات العينات = { (٢،٤) ، (٢،٦) ، (٢،٨) ، (٢،١٠)
(٤،٦) ، (٤،٨) ، (٤،١٠)
(٦،٨) ، (٦،١٠)
(٨،١٠) }

ويلاحظ على هذا المثال التمهيدى أنـــه إذا كـــانت المفــردة فـــى المجتمع يمكن اختيارها أكثر من مره فى عملية إيجاد عينات المجتمـــع ، فإن المعاينة تسمى المعاينة بارجاع والمجتمع غير محدود ، أما إذا كـــانت

المفردة فى المجتمع لا يمكن اختيارها أكثر من مره فإن المعاينة تسمى المعاينة بدون ارجاع والمجتمع محدود ، وسيتضح ذلك فى الأمثلة التى سترد فيما بعد .

ونظرية العينات هى دراسة العلاقة الموجودة بين المجتمع الإحصائى والعينات المسحوبة منه ، ولهذه النظرية أهمية كبيرة فى كثير من الأمور ، فهى تفيد فى تقدير معالم المجتمع مثل متوسط المجتمع (μ) والنسبة فى المجتمع (B) .... ، كما تفيد فى اجراء اختبارات الفروق والتى لها أهميتها فى نظرية اتخاذ القرارات .

الفصل الأول

توزيع متوسطات عينات المجتمع واستخدامه فى تقدير (μ)

يشتمل هذا الفصل على الآتى :

أولا : توزيع متوسطات عينات المجتمع .

ثانيا : الوصف الإحصائى للمجتمع باستخدام بياناته الأصلية وباستخدام توزيع متوسطات عيناته .

ثالثا : العلاقة بين معالم المجتمع ومعالم توزيع متوسطات عيناته .

رابعا : تقدير متوسط المجتمع (μ) باستخدام متوسط عينة (س) تنتمى إليه .

خامسا : تقدير متوسط المجتمع (μ) إذا كان توزيع عيناته بدون ارجاع

سادسا : تقدير حجم العينة اللازم للاستدلال عن المتوسط(μ) فى المجتمع .



أولا : توزيع متوسطات عينات المجتمع .

من مثال التمهيد

∵ بيان العينات = {(٢،٢) ، (٢،٤) ، (٢،٦) ، (٢،٨) ، (٢،١٠) ،
(٤،٢) ، (٤،٤) ، (٤،٦) ، (٤،٨) ، (٤،١٠) ،
(٦،٢) ، (٦،٤) ، (٦،٦) ، (٦،٨) ، (٦،١٠) ،
(٨،٢) ، (٨،٤) ، (٨،٦) ، (٨،٨) ، (٨،١٠) ،
(١٠،٢) ، (١٠،٤) ، (١٠،٦) ، (١٠،٨) ، (١٠،١٠)}

∴ بيان متوسطات العينات = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ،
٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ،
٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ،
٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ،
٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}



∴ التوزيع التكراري لمتوسطات عينات المجتمع :

س (كفئات)	العلامـــــــات	التكرار (ك)
٢	/	١
٣	//	٢
٤	///	٣
٥	////	٤
٦	~~////~~	٥
٧	////	٤
٨	///	٣
٩	//	٢
١٠	/	١
المجموع	/	٢٥

ويسمى هذا التوزيع بتوزيع متوسطات عينات المجتمع أو التوزيع العينـــى للمتوسط Sampling Distribution of the mean ولـــهذا التوزيع أهمية كبيرة فى إحصاء العينات .



ثانيا : الوصف الإحصائى للمجتمع باستخدام بياناته الأصلية وباستخدام توزيع متوسطات عيناته .

أ – باستخدام بياناته الأصلية :

من مثال التمهيد

* σ^2 المتوسط الحسابي للمجتمع : ويرمز (μ)

$$\because \quad \mu = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

* تباين المجتمع : ويرمز له بالرمز (σ^2)

$$\because \quad \sigma^2 = \frac{\text{مجـ (س – س)}^٢}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ س}^٢}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^٢$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{٤ + ١٦ + ٣٦ + ٦٤ + ١٠٠}{٥} - \left(\frac{٣٠}{٥}\right)^٢$$

$$= ٤٤ - ٣٦$$

$$= ٨$$

* الانحراف المعيارى للمجتمع : ويرمز له σ

$\because \sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\therefore \sigma = \sqrt{٨}$

$= ٢,٨٣$

* التواء مفردات المجتمع :

$\because$ المفردات هي ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠

، $\therefore \mu = ٦$

، $\because$ الوسيط = ٦ حيث هو قيمة المفردة التى تتوسط ترتيب قيم المفردات

، $\because$ معامل الالتواء = $\frac{\bar{س} - ط}{ع}$

$\therefore$ معامل الالتواء = $\frac{٦ - ٦}{٢,٨٣}$

= صفر

وعليه فتوزيع مفردات المجتمع توزيع معتـــدل ، كمـــا يمكـــن إثبـــات أن تفرطحه $\approx$ ٣ .



ب- الوصف الإحصائي للمجتمع باستخدام توزيع متوسطات عيناته:

من بيانات المثال التمهيدي المطلـــوب : الوصـــف الإحصـــائي لتوزيـــع متوسطات عينات المجتمع .

الحـــــل

* المتوسط الحسابي لتوزيع متوسطات عينات المجتمع (ورمزه $\overline{\overline{س}}$)

الجدول الإحصائي اللازم :

$\overline{س}$	ك	$\overline{س}$ ك	$\overline{س}^{٢}$ ك
٢	١	٢	٤
٣	٢	٦	١٨
٤	٣	١٢	٤٨
٥	٤	٢٠	١٠٠
٦	٥	٣٠	١٨٠
٧	٤	٢٨	١٩٦
٨	٣	٢٤	١٩٢
٩	٢	١٨	١٦٢
١٠	١	١٠	١٠٠
المجموع	٢٥	١٥٠	١٠٠٠

$$\because \quad \bar{\bar{س}} = \frac{مج\ \bar{س}\ ك}{مج\ ك}$$

$$\therefore \quad \bar{\bar{س}} = \frac{١٥٠}{٢٥} = ٦$$

* التباين* لتوزيع متوسطات عينات المجتمع (ورمزه $\sigma^2_{\bar{س}}$)

$$\because \quad \sigma^2_{\bar{س}} = \frac{مج\ \bar{س}^٢\ ك}{مج\ ك} - \left(\frac{مج\ \bar{س}\ ك}{مج\ ك}\right)^٢$$

$$= \frac{١٠٠٠}{٢٥} - \left(\frac{١٥٠}{٢٥}\right)^٢$$

$$= ٤٠ - ٣٦ = ٤$$

* الانحراف المعياري لتوزيع متوسطات عينات المجتمع (ورمزه $\sigma_{\bar{س}}$)

$$\because \quad \sigma_{\bar{س}} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{س}}}$$

$$\therefore \quad \sigma_{\bar{س}} = \sqrt{٤} = ٢$$

ويطلق على $\sigma_{\bar{س}}$ بالخطأ المعياري للمتوسط، ويستخدم الخطأ المعياري فى تقدير معالم المجتمع وفى اختبارات الفروق، وهذا ما سيتم التعـــرض لـــه تباعا .

---

* هو متوسط مجموع مربعات انحرافات متوسطات العينات عن متوسط المجتمع أى $\frac{مج (\bar{س} - \bar{\bar{س}})^٢ ك}{ك}$



* الالتواء والتفرطح لتوزيع متوسطات عينات المجتمع .

سوف نستخدم العزوم في قياس الالتواء والتفرطح لهذا التوزيع :

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

$\bar{س}$	ك	$\bar{س} - \bar{\bar{س}}$ (ح)	ح ك	ح^{٢} ك	ح^{٣} ك	ح^{٤} ك
٢	١	٤-	٤-	١٦	٦٤-	٢٥٦
٣	٢	٣-	٦-	١٨	٥٤-	١٦٢
٤	٣	٢-	٦-	١٢	٢٤-	٤٨
٥	٤	١-	٤-	٤	٤-	٤
٦	٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٧	٤	١	٤	٤	٤	٤
٨	٣	٢	٦	١٢	٢٤	٤٨
٩	٢	٣	٦	١٨	٥٤	١٦٢
١٠	١	٤	٤	١٦	٦٤	٢٥٦
المجموع	٢٥	صفر	صفر	١٠٠	صفر	٩٤٠

$$\text{العزم الثانى} = \frac{\text{مج ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مج ك}} - \left(\frac{\text{مج ح ك}}{\text{مج ك}}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١٠٠}{٢٥} - \left(\frac{\text{صفر}}{٢٥}\right)^{٢}$$

$= ٤$ وهو فعلا يساوى تباين التوزيع أي $\sigma^{2}_{\bar{س}}$



∵ العزم الثالث = $\frac{\text{مجـ ح}^{٣}\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(٣ \times \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \times \frac{\text{مجـ ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مجـ ن}} + ٢ \left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \right)^{٢} \right)$

= $\frac{\text{صفر}}{٢٥} - \left(٣ \times \frac{\text{صفر}}{٢٥} \times \frac{١٠٠}{٢٥} + ٢ \left(\frac{\text{صفر}}{٢٥} \right)^{٢} \right)$

∵ العزم الرابع = $\frac{\text{مجـ ح}^{٣}\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - ٣ \left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \right)^{٤} - ٤ \frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \times \frac{\text{مجـ ح}^{٣}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$

$+ ٦ \left(\frac{\text{مجـ ح ك}}{\text{مجـ ك}} \right)^{٢} \times \frac{\text{مجـ ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مجـ ك}}$

= $\frac{٩٤٠}{٢٥} - ٣ \left(\frac{\text{صفر}}{٢٥} \right)^{٤} - ٤ \frac{\text{صفر}}{٢٥} \times \frac{\text{صفر}}{٢٥}$

$+ ٦ \left(\frac{\text{صفر}}{٢٥} \right)^{٢} \times \frac{١٠٠}{٢٥}$

= ٣٧,٦

∵ معامل الالتواء = $\frac{م_{٣}^{٢}}{م_{٢}^{٣}}$

∴ معامل الالتواء = $\frac{\text{صفر}}{٤^{٣}}$ = صفر

ولذلك فالتوزيع معتدل .

، ∵ معامل التفرطح = $\frac{م_{٤}}{م_{٢}^{٢}}$ = $\frac{٣٧,٦}{١٦}$ = ٢,٣٥ أي ≈ ٣



وإذا استخدمنا المعادلة المعيارية على هذا التوزيع سنجد :

$\overline{\overline{س}}$ = صفر ، $\sigma^2_{\overline{س}}$ = ١ ، $\sigma_{\overline{س}}$ = ١

معامل الالتواء = صفر ، معامل التفرطح = ٣

وإذا قمنا بتوزيع المساحة تحت المنحنى المعياري لتوزيع متوسطات عينات المجتمع سنجد أنه يتبع توزيع ى ومن ثم يمكن استخدام جدول توزيع ى فى معرفة الخصائص النسبية أو الاحتمالية لتوزيع متوسطات عينات المجتمع .

ثالثا : العلاقة بين معالم المجتمع ومعالم توزيع متوسطات عيناته :

مثـــال

من بيانات المثال السابق **المطلوب** : ادرس العلاقة بين معالم المجتمع (μ ، σ^2 ، σ) ومعالم وزيع متوسطات عيناته ($\overline{\overline{س}}$ ، $\sigma^2_{\overline{س}}$ ، $\sigma_{\overline{س}}$)

الحـــل

أ – العلاقة بين μ ، $\overline{\overline{س}}$:

∵ μ = ٦ ، $\overline{\overline{س}}$ = ٦ من حل المثال محل الدراسة

∴ $\mu = \overline{\overline{س}}$

أي أن متوسط المجتمع = متوسط متوسطات عيناته وهذه قاعدة

ب- العلاقة بين $\sigma^2_{\bar{س}}$ ، σ^2 :

∵ $\sigma^2_{\bar{س}} = ٤$ ، $\sigma^2 = ٨$ من حل المثال محل الدراسة

∴ $\sigma^2_{\bar{س}} = \frac{\sigma^2}{ن}$ حيث ن هي حجم لعينة فى عينـــات المجتمـــع وتساوى فى مثالنا ٢ .

أي أن تباين متوسطات عينات المجتمع = تباين المجتمع الأصلي مقســـوم على حجم العينة ن وهذه قاعدة .

جـــ - العلاقة بين σ ، $\sigma_{\bar{س}}$:

∵ $\sigma^2_{\bar{س}} = \frac{\sigma^2}{ن}$

∴ $\sigma_{\bar{س}} = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ وهذه قاعدة



أي أن الخطأ المعياري للمتوسط = الانحراف المعياري للمجتمع مقسوم على الجذر التربيعي لحجم العينة ن .

٤ - أن توزيع متوسطات عينات المجتمع توزيع معتدل ، وأيضا توزيع المجتمع الأصلى توزيع معتدل ، وعليه إذا كان المجتمع الأصلي توزيع معتدل فإن توزيع متوسطات عينات المجتمع سيكون توزيع معتدل (وهذه قاعدة) .

هـ- إذا كان توزيع المجتمع الأصلي توزيع غير معتدل فإن توزيع متوسطات عينات المجتمع سيكون توزيع غير معتدل وبالتالي لا يمكننا استخدام توزيع ى ، لكن إذا كبر حجم العينة ن وأصبح أكبر من ٣٠ مفردة فإن توزيع متوسطات عينات المجتمع سيكون توزيع معتدل أو قريب منه .

فى مثالنا محل الدراسة كان حجم العينة ن يساوي ٢ وبالرغم من ذلك كان توزيع متوسطات عينات المجتمع توزيع معتدل ذلك لأن توزيع المجتمع الأصلي توزيع معتدل .



رابعا : تقدير متوسط المجتمع (μ) باستخدام متوسط عينة ($\bar{س}$)

تنتمي إليه :

إذا أردنا دراسة أوزان مجموعة من الطلبة وقمنا بسحب عينة من هذا المجتمع بطريقة عشوائية ، فإننا نحصل على متوسط لهذه العينة يبلغ ٧٥ سم مثلا ، وإذا سحبنا عينة ثانية لها نفس الحجم ومسحوبة بنفس الطريقة فغالبا لا نجد أن متوسط العينة الجديدة مساويا لمتوسط العينة الأولى ، وهكذا إذا كررنا سحب العينة عدة مرات فإنه نادرا ما نحصل على متوسطات متساوية ، وهذا يجعلنا نتساءل كيف يمكن تقدير متوسط المجتمع من عينة تنتمي إليه مع وجود هذا الأختلاف فى متوسطات العينات المسحوبة منه وبنفس الطريقة وبنفس الحجم . وللاجابة على هذا التساؤل يستلزم الأمر دراسة التوزيع التكراري لمتوسطات عينات المجتمع وهو الذي قد انتهينا من دراسته منذ قليل .

ولما كان التوزيع العينى للمتوسطات يأخذ شكل التوزيع



المعتدل أو شكلا قريبا منه ، فإنه يمكن الاستفادة من خواص التوزيع المعتدل فى الحصول على تقدير لمتوسط المجتمع من متوسط أحدى عيناته[١] حيث :

متوسط المجتمع (μ) يقع بين $\bar{س}$ ± ٣ $\sigma_{\bar{س}}$ بدرجة ثقة ٩٩,٧%

أو بين $\bar{س}$ ± ٢ $\sigma_{\bar{س}}$ بدرجة ثقه ٩٥,٥%

<u>ملاحظات :</u>

* من الأهمية بمكان ملاحظة أن $\sigma_{\bar{س}} = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ ، وأنه يمكن استبدال σ (الانحراف المعياري للمجتمع) بـ ع (الانحراف المعياري للعينة) إذا غالبا ما تكون σ غير معلومة ، وعملية الاستبدال هذه لا تؤدى إلى خطأ كبير طالما أن حجم العينة كبير .

* μ هي متوسط المجتمع ، $\bar{س}$ هى متوسط العينة المسحوبة عشوائيان من هذا المجتمع .

---

(١) وهنا يتضح أهمية دراسة العينات .



* ± ٣ هي الفترة المعيارية من ى = - ٣ إلـــي ى = ٣ المقابلـــة للاحتمال ٠,٩٩٧ .

* $\sigma_{\bar{س}}$ هي الخطأ المعياري للوسط الحسابي Standerd error of mean ويساوي $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

* $\bar{س} + ٣ \sigma_{\bar{س}}$ هى الحد الأعلى للثقة ٩٩,٧%

* $\bar{س} - ٣ \sigma_{\bar{س}}$ هي الحد الأدنى للثقة ٩٩,٧%

* يسمى الحدين الأعلى و الأدنى بحدى الثقة Confidence Limits

* مدي الثقة يساوي الحد الأعلى للثقة ناقص الحد الأدنى للثقة .

وعلى أية حال فإن التقدير لمتوســـط المجتمـــع (μ) باســـتخدام متوسط عينة ($\bar{س}$) تنتمي إليه – أو التقدير لأى معلمة أخرى – لا يكون تقديرا صحيحا بنسبة ١٠٠% ، بل هو حكم احتمالي على المجتمـــع قـــائم على أساس بيانات عينة مسحوبة منه ، وقد تصل درجة الثقـــة فـــى هـــذا الحكم إلى ٩٩,٩٩٩% .

أمثلـــــه

مثال١ : إذا كان أطوال الطلبة بإحدى الكليات يتبع توزيع طبيعـــي تباينـــه ٣٦ ، تم سحب عينة عشوائية من هذا المجتمـــع حجمـــها ١٠٠ طـــالب ، وتبين أن متوسط طول الطلبة فى العينة هو ١٧٠ سم **والمطلوب :**

تقدير متوسط طول الطلبة فى المجتمع (الكليـــة) بدرجـــة ثقـــة ٩٥% إذا علمت أن ى المقابلة تساوي ١,٩٦ .

استعن بهذا الشكل

٩٥%

١,٩٦ ١,٩٦

الحـــــل

$\because \mu = \bar{\text{س}} \pm \text{ى} \times \sigma_{\bar{\text{س}}}$ عند درجة الثقة المعينة .

، $\because$ درجة الثقة ٩٥% $\therefore$ ى المقابلة لها = $\pm$ ١,٩٦

$\therefore \mu = ١٧٠ \pm ١,٩٦ \times \frac{٦}{١٠}$ حيث $\sigma_{\bar{\text{س}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{\sqrt{٣٦}}{\sqrt{١٠٠}}$

$= ١٧٠ \pm ١,١٧٦$

$= ١٧٠ + ١,١٧٦$ ، $١٧٠ - ١,١٧٦$

١٧١,١٧٦سم ≥ μ ≥ ١٦٧,٨٢٤ سم بدرجة ثقه ٩٥%

أي أن متوسط المجتمع ينحصر بين هذين الطولين بدرجة ثقه ٩٥% ، أي أن هناك نسبة خطأ ٥% أن يخرج متوسط المجتمع عن هذين الحدين

، مدى الثقة = الحد الأعلى للثقة − الحد الأدنى للثقة

= ١٧١,١٧٦ − ١٦٨,٨٢٤ = ٢,٣٥٢سم

مثال٢ : إذا كان وزن الطلبة بإحدى الكليات يتبع توزيــع طبيعــي ، تــم سحب عينة عشوائية حجمها ٨١ طالب وتبين أن متوسط وزن الطلبة فــى العينة هو ٦٥ كجم بانحراف معياري ٧ كم **والمطلوب** : تقديــر متوســط وزن الطلبة فى المجتمع (الكلية) بدرجة ثقة ٩٩% .

الحـــــل

ملحوظة هامة : واضح أن σ للمجتمــع غير معلومة وهنا يمكن اســتخدام ع للعينة حيث أن هذا التعويض لا يؤدى إلى خطأ كبير طالمــا أن حجــم العينة > ٣٠ .



وعليـــــه

-٢,٥٦   +٢,٥٦

∵ درجة الثقة المطلوبة هي ٩٩%   ∴ ى المقابلة = ٢,٥٧٦

، ∵ $\mu = \bar{\text{س}} \pm \text{ى}\ \sigma_{\bar{\text{س}}}$ عند درجة الثقة المعينة

$$= ٦٥ \pm ٢,٥٧٦ \times \frac{٧}{\sqrt{٨١}}$$

$$= ٦٥ \pm ٢$$

$$= ٦٥ + ٢ \quad ، \quad ٦٥ - ٢$$

٦٧ كجم $\geq \mu \geq$ ٦٣ كجم

أي أن متوسط وزن الطلبة فى الكلية ينحصر بين ٦٧ ، ٦٣ كجم بدرجة ثقة ٩٩%

__مثال٣ :__ إذا كان متوسط الاتفاق اليومي لعينة من ٤ سائحين فرنسيين أقاموا فى مصر أسبوع هو ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ٢٠ دولار فى اليوم .

والمطلوب : تقدير متوسط اتفاق السائح الفرنسى فى اليوم بالدولار بدرجة ثقة ٩٥% .



الحـــــل

$\because$ $\bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن}$ $\therefore$ $\bar{س} = \frac{٢٧+٢٨+٢٥+٢٠}{٤} = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$

ع = $\sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^٢}{ن}}$ إلا أننا نستخدم الانحراف المعياري المعدل ع = $\sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^٢}{ن - ١}}$

ذلك لأننا عند حساب ع للمجتمع من عينه فإننا نحســـب مجـ $(س - \bar{س})^٢$

وليس مجـ $(س - \mu)^٢$ الأمر الذى يجعل ع متحيزه للمجتمع ما لـــم يتـــم

القسمه على (ن – ١) وتسمى بردجات الحرية .

$\therefore$ ع = $\sqrt{\frac{(٢٧-٢٥)^٢+(٢٨-٢٥)^٢+(٢٥-٢٥)^٢+(٢٠-٢٥)^٢}{٤ - ١}} = \sqrt{\frac{٤+٩+٠+٢٥}{٣}}$

$= \sqrt{\frac{٣٨}{٣}} = ٣,٥٦$

$\because$ $\mu = \bar{س} \pm ت \times \sigma_{\bar{س}}$

$= ٢٥ \pm ٣,١٨٢ \times \frac{٣,٥٦}{\sqrt{٤}}$

حيث : ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية ٣ هـــى ،

٣,١٨٢ ، $\sigma_{\bar{س}}$ هى $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$



$\therefore$ μ = ٢٥ ± ٥,٦٦

μ = ٢٥ + ٥,٦٦ ، ٢٥ − ٥,٦٦

٣,٦٦ ≤ μ ≤ ١٩,٣٤

أي أن متوسط اتفاق السائح الفرنسى فى اليـــوم يـــتراوح بيـــن ١٩,٣٤ ، ٣٠,٦٦ دولار فى اليوم بدرجة ثقة ٩٥% .

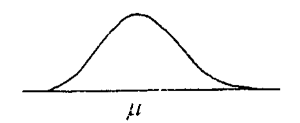
__مثال٤ :__ تقدم ٤٥٢ طالب بالسياحة والفنادق لامتحان أحـــد المواد ، أخـــذت عينة عشوائية من أوراق الامتحان حجمها ٢٥ درجة إجابة ، وتبين أن متوسط درجات العينة هو ٦٤ درجـــــة بـــانحراف معيـــاري ١٥ درجـــة

والمطلـــوب : تقدير متوسط المجتمع (درجات الطلبة جميعـــهم) بدرجـــة ثقـــــة ٩٥% .

الحـــــــل

ملحوظه هامة : لما كان حجم العينة أقل من ٣٠ مفرده فإن اســـــتخدام ع بدلا من σ سيؤدى إلى خطأ كبير لذلك يتـــــم اســـتخدام درجـــة معيارية جديدة بدلا من ى وهي ت بدرجات حرية (ن − ١)





∴ μ = س̄ ± ت $\sigma_{س̄}$ عند درجة الثقه المعنية

= ٦٤ ± ٢,٠٦٤ × $\frac{١٥}{\sqrt{٢٥}}$ حيث $\sigma_{س̄}$ = $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$

وحيث ت الجدوليه عند مستوى معنوية٠,٠٥ودرجات حرية ٢٤=٢,٠٦٤

∴ μ = ٦٤ ± ٦,١٩٢

= ٦٤ + ٦,١٩٢ ، ٦٤ - ٦,١٩٢

٧٠,١٩٢ ≥ μ ≥ ٥٧,٨٠٨ درجة بدرجة ثقه ٩٥%

مثال ٥ : عينة حجمها ٢٢٥ ومتوسطها الحسابي ٤٠ وانحرافها المعيـاري ١٥ **والمطلوب** : تقدير مدي الثقة لمتوسط المجتمع بدرجة ثقه ٩٩% ، إذا علمت أن ى الجدولية عند مستوى معنوية ١% تساوي ٢,٥٨ .

الحـــــل

بالرغم من عدم وجود σ للمجتمع فإنه يمكن اعتبار σ = ع نظر لكـــبر حجم (ن > ٣٠) .

∵ μ = $\bar{س}$ ± ى $\sigma_{\bar{س}}$ عند مستوى الثقة المطلوب

∴ μ = ٤٠ ± ٢,٥٨ × $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$

= ٤٠ ± ٢,٥٨ $\frac{١٥}{\sqrt{١٥}}$

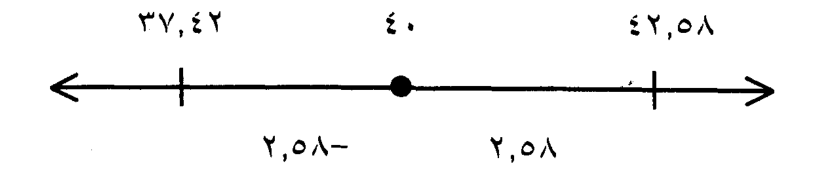
= ٤٠ ± ٢,٥٨

٤٢,٥٨ ≥ μ ≥ ٣٧,٤٢ بدرجة ثقه ٩٩%

∴ متوسط هذا المجتمع ينحصر بين حد أعلى للثقة وهو ٤٢,٥٨ ، وحـد أدنى للثقة وهو ٣٧,٤٢ .

∴ الحد الأعلى للخطأ المسموح به = $\frac{٤٢,٥٨ - ٣٧,٤٢}{٢}$ = ٢,٥٨

والحد الأدنى للخطأ المسموح به = صفر





خامسا : تقدير متوسط المجتمع (μ) إذا كان توزيع عيناته بدون إرجاع ·

(١)تبين من مثال التمهيد أن العينات فى هذه الحالة بلغ ١٠ عينات وهى :

(٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٨) ، (٢ ، ١٠) ، (٤ ، ٦) ، (٤ ، ٨)،

(٤ ،١٠) ، (٦ ، ٨) ، (٦ ، ١٠) ، (٨ ، ١٠)

(٢) وعلى ذلك فمتوسطات هذه العينات هى :

٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ،

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ،

٨ ، ٩

(٣) والتوزيع التكراري لهذه المتوسطات :

$\overline{س}$	العلامات	ك
٣	/	١
٤	/	١
٥	//	٢
٦	//	٢
٧	//	٢
٨	/	١
٩	/	١
المجموع	/	١٠

(٤) والوصف الإحصائي للتوزيع :

$\bar{\text{س}}$	ك	$\bar{\text{س}}$ ك	$\bar{\text{س}}^{2}$ ك
٣	١	٣	٩
٤	١	٤	١٦
٥	٢	١٠	٥٠
٦	٢	١٢	٧٢
٧	٢	١٤	٩٨
٨	١	٨	٦٤
٩	١	٩	٨١
المجموع	١٠	٦٠	٣٩٠

$$\because \quad \bar{\bar{\text{س}}} = \frac{\text{مج } \bar{\text{س}} \text{ ك}}{\text{مج ك}}$$

$$\therefore \quad \bar{\bar{\text{س}}} = \frac{\text{٦٠}}{\text{١٠}} = \text{٦}$$

$$\text{،} \quad \because \quad \sigma^{2}_{\bar{\text{س}}} = \frac{\text{مج } \bar{\text{س}}^{2} \text{ ك}}{\text{مج ك}} - \left(\frac{\text{مج } \bar{\text{س}} \text{ ك}}{\text{مج ك}}\right)^{2}$$

$$= \frac{\text{٣٩٠}}{\text{١٠}} - \left(\frac{\text{٦٠}}{\text{١٠}}\right)^{2}$$

$$= \text{٣٩} - \text{٣٦}$$

$$= \text{٣}$$



(٥) العلاقة بين معالم التوزيع الناتج ومعالم مجتمعه الإحصائي :

* $\overline{س} = \mu = ٦$

* $\sigma^2_{\overline{س}} = \frac{\sigma^٢}{ن} \times \frac{م - ن}{م - ١}$ لأن :

$= \frac{٨}{٢} \times \frac{٥ - ٢}{٥ - ١}$

$= ٤ \times \frac{٣}{٤}$

$= ٣$

* $\sigma_{\overline{س}} = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{م - ن}{م - ١}}$

(٦) مثال على التقدير في هذه الحالة :

مصنع ينتج مصابيح كهربائية ، بلغ إنتاجه إحدى الورديات ١٠٠٠ مصباح ، سحبت منه عينة مكونة من ٢٠٠ مصباح وأجريت عليها تجربة لمعرفة طول فترة إضاءتها (عمر المصباح) فوجد أن متوسط عمر المصباح في العينة ٦٠٠ ساعة بانحراف معياري ١٥ ساعة، **والمطلوب** : تقدير المجتمع (μ) بدرجة ثقة ٩٥% .



الحـــــل

$\because \quad \mu = \bar{\text{س}} \pm \text{ى} \; \sigma_{\bar{\text{س}}}$

$= \bar{\text{س}} \pm \text{ى} \; \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} \times \sqrt{\frac{\textbf{ن} - \text{ن}}{\textbf{ن} - \text{١}}}$

، $\because$ درجة الثقة ٩٥% (معطى)

$\therefore \quad \text{ى} = \pm \text{١,٩٦}$

$\therefore \quad \mu = \text{٦٠٠} \pm \text{١,٩٦} \times \frac{\text{١٥}}{\sqrt{\text{٢٠٠}}} \times \sqrt{\frac{\text{١٠٠٠} - \text{٢٠٠}}{\text{١٠٠٠} - \text{١}}}$

$= \text{٦٠٠} \pm \text{١,٩٦} \times \text{١,٠٦٠٦} \times \text{٠,٨٩٤٨}$

$= \text{٦٠٠} \pm \text{١,٨٦٠}$

$\text{٥٩٨,١٤} \leq \mu \leq \text{٦٠١,١٤}$ بدرجة ثقة ٩٥% .

ومن الأهمية بيان ذكر أن التقدير يتأثر بـ :

-حجم العينة : فإذا اختلف حجم العينــــة عــن ٢٠٠ وليكــن ١٠ مفردات فإن التقدير السابق سيختلف .



- $\sigma_{\bar{س}}$: فإذا اختلف الانحراف المعيــــاري لتوزيعـــات عينـــات المجتمع فإن التقدير السابق سيختلف .

-درجة الثقة : فى اختلافها تأثير على التقدير .

مثـــــال عــــام

نفرض أن لدينا مجتمع مكون من خمســـة أفـــراد ورمزنـــا لـــهم بالرموز أ ، ب، جـ ، ء ، هـ وكانت أعمارهم بالترتيب كالتـــالى ٢١ ، ١٩ ، ١٦ ، ١٧ ، ٢٢ سنه ، وأردنا أن نقدر المتوسط الحســـابي لعمـــر الفرد فى ذلك المجتمع باستخدام عينة عشوائية بسيطة مكونة من ٣ أفـــراد فماذا نفعل ؟

الحــــل

أولا : وصف المجتمع باستخدام مفرداته الأصلية :

$$\because \mu = \frac{مجـ س}{ن}$$

$$\therefore \mu = \frac{٢١+١٩+١٦+١٧+٢٢}{٥} = \frac{٩٥}{٥} = ١٩$$

$$\because \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \mu)^2}{ن}}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{(٢١-١٩)^2+(١٩-١٩)^2+(١٦-١٩)^2+(١٧-١٩)^2+(٢٢-١٩)^2}{٥}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٦}{٥}} = ٢,٢٨٠٤$$

ثانيا : وصف المجتمع باستخدام عيناته :

عدد عينات المجتمع = $^{ن}ق_{ر}$ (حيث السحب بدون إرجاع هو المناسب)

= $^{٥}ق_{٣}$ = ١٠ عينات وهم :

أ ب جـ ، أ ب ء ، أ ب هـ ، أ جـ ء ، أ جـ هـ ، أ ء هـ ، ب جـ ء ، ب جـ هـ ، ب ء هـ ، جـ ء هـ .

الجدول الإحصائي اللازم لحساب $\bar{\bar{س}}$ ، $\sigma_{\bar{س}}$:

العينات	$\bar{س}$	$(\bar{س} - \bar{\bar{س}})$	$(\bar{س} - \bar{\bar{س}})^2$
أ ب جـ	١٨,٦٧	-٠,٣٣	٠,١٠٨٩
أ ب ء	١٩,٠٠	صفر	صفر
أ ب هـ	٢٠,٦٧	١,٦٧	٢,٧٨٨٩
أ جـ ء	١٨,٠٠	-١,٠٠	١,٠٠٠٠



أ جـ هـ	١٩,٦٧	٠,٦٧	٠,٤٤٨٩
أ ء هـ	٢٠,٠٠	١,٠٠	١,٠٠٠٠
ب جـ ء	١٧,٣٣	-١,٦٧	٢,٧٨٨٩
ب جـ هـ	١٩,٠٠	صفر	صفر
ب ء هـ	١٩,٣٣	٠,٣٣	٠,١٠٨٩
جـ ء هـ	١٨,٣٣	-٠,٦٧	٠,٤٤٨٩
المجموع	١٩٠	صفر	٨,٦٩٣٤

$$\bar{\bar{س}} = \frac{مجـ\ \bar{س}}{ن} = \frac{٩٥}{٥} = ١٩$$

$$\sigma_{\bar{س}} = \sqrt{\frac{مجـ(\bar{س} - \bar{\bar{س}})^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{٨,٦٩٣٤}{١٠}} = ٠,٩٣٢٤$$

ثالثا : العلاقات بين الوصفين :

$$\mu = \bar{\bar{س}} = ١٩$$

$$\sigma_{\bar{س}} = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{ن - ن}{ن - ١}}$$ حيث ن هى حجم العينة

$$= \frac{٢,٢٨٠٤}{\sqrt{٣}} \times \sqrt{\frac{٥ - ٣}{٥ - ١}}$$

$$٠,٩٣ = ٠,٩٣$$



رابعا : التواء توزيع المجتمع وتوزيع عيناته :

* التواء المجتمع :

∵ μ = ١٩، الوسيط=١٩ حيث (١٦،١٧،١٩،٢١،٢٢)

، ∵ معامل الالتواء = $\frac{\bar{س} - ط}{\sigma}$

= $\frac{١٩ - ١٩}{\sigma}$

= صفر

∴ توزيع المجتمع توزيع معتدل

* التواء التوزيع :

∵ $\bar{\bar{س}}$ = ١٩

، ∵ الوسيط = ١٩ حيث هو القيمة التي تتوسط قيم س بعد ترتيبها :

١٧,٣٣ ، ١٨ ، ١٨,٣٣ ، ١٨,٦٧ ، ١٩ ، ١٩ ، ١٩,٣٤ ، ١٩,٦٧ ،

١٩,٦٧ ، ٢٠ ، ٢٠,٦٧ .

، ∵ معامل الالتواء = $\frac{\bar{\bar{س}} - ط}{ع}$

= $\frac{١٩ - ١٩}{٠,٩٣٢٤}$

= صفر



∴ توزيع عينات المجتمع توزيع معتدل

خامسا : عملية التقدير المطلوب :

(١) نفرض أننا سحبنا أحد عينات المجتمع وكانت هى العينة أ ب هـ أي ٢١ ، ١٩ ، ٢٢ وعلى ذلك فإحصاءات هذه العينة هي :

$$\bar{\text{س}}\ \text{للعينة} = \frac{٢١+١٩+٢٢}{٣} = \frac{٦٢}{٣} = ٢٠,٦٧$$

$$\text{ع للعينة} = \sqrt{\frac{(٢١-٢٠,٦٧)^{٢}+(١٩-٢٠٦٧)^{٢}+(٢٢-٢٠,٦٧)^{٢}}{٣}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤,٦٦٦٧}{٣}} = ١,٢٤٧٢$$

$$\text{ع المعدل للعينة} = \sqrt{\frac{٤,٦٦٦٧}{٣}} = ١,٥٢٧٥$$

(٢) إذا كانت σ معلومة :

$$\because \quad \mu = \bar{\text{س}} \pm \text{ى}\ \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} \times \sqrt{\frac{N - \text{ن}}{N - ١}}$$

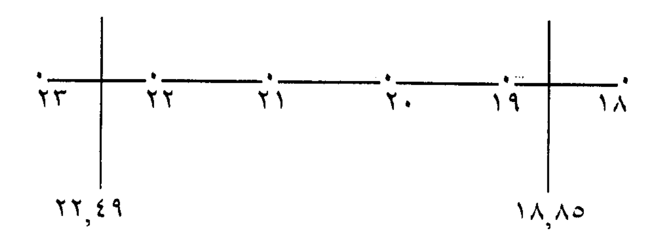
حيث السحب بدون ارجاع

$= ٢٠,٦٧ \pm ١,٩٦ \times ٠,٩٣$ حيث درجة الثقة ٩٥%



= ٢٠,٦٧ ± ١,٨٢

١٨,٨٥ ≥ μ ≥ ٢٢,٤٩ بدرجة ثقه ٩٥%



ولما كانت μ فعلا تساوى ١٩ إذاً فالتقدير هذا مقبولا عند درجة الثقـــة ٩٥% .

(٣) إذا كانت μ غير معلومة :

$$\because \quad \mu = \overline{س} \pm ى \frac{ع}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{ن - ن}{ن - ١}}$$

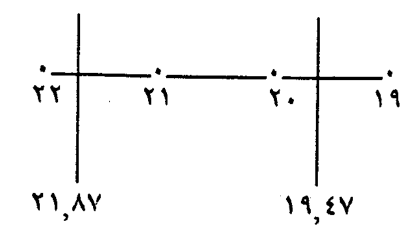
$$= ٢٠,٦٧ \pm ١,٩٦ \times \frac{١,٥٢٣٥}{\sqrt{٣}} \times \sqrt{\frac{٢}{٤}}$$

$$= ٢٠,٦٧ \pm ١,٩٦ \times ٠,٦٢٣٤$$

$$= ٢٠,٦٧ \pm ١,٢٠$$

$$١٩,٤٧ \geq \mu \geq ٢١,٨٧$$





ولما كانت μ فعلا تساوى ١٩ إذا فهذا التقدير غير مقبول عند درجة ثقة ٩٥% لكون خارج فترة الثقة ، وعلى ذلك فهذه العينة لا تصلح لتقدير متوسط المجتمع عند درجة ثقة ٩٥% فهى من العينات النادرة ، وسوف يتم تناول ذلك عند دراسة اختبارات الفروق فى الباب القادم .

وجدير بالإشارة إلى أنه إذا قمنا بهذا التقدير باستخدام ت بدلا من ى فإن التقدير سيكون أيضا غير مقبول ، الأمر الذى يجعل أن السبب فى ذلك يرجع إلى حجم العينة ، ولذلك ماذا لو تم تكبير حجم العينة ؟

(٤) تكبير حجم العينة :

نفرض أن حجم العينة يساوى ٤ مفردات .

∴ عدد عينات المجتمع = ^{5}ق$_{4}$ = ٥ عينات وهى :

أ ب جـ ء، أ ب جـ هـ ، ب جـ ء هـ ، جـ ء هـ أ ، ء هـ أ ب

الجدول الإحصائي اللازم لحساب س ، $\sigma_{\bar{س}}$:

العينات	$\bar{س}$	$(\bar{س} - \bar{\bar{س}})$	$(\bar{س} - \bar{\bar{س}})^2$
أ ب جـ ء	١٨,٢٥	-٠,٧٥	٠,٥٦٢٥
أ ب جـ هـ	١٩,٥	-٠,٥٠	٠,٢٥٠٠
ب جـ ء هـ	١٨,٥	٠,٥٠	٠,٢٥٠٠
جـ ء هـ أ	١٩,٠	صفر	صفر
ء هـ أ ب	١٩,٧٥	٠,٧٥	٠,٥٦٢٥
المجموع	٩٥	صفر	١,٦٢٥

$$\therefore \bar{\bar{س}} = \frac{٩٥}{٥} = ١٩ = \mu$$

$$\sigma_{\bar{س}} = \sqrt{\frac{١,٦٢٥}{٥}} = ٠,٥٧$$

$$\therefore \sigma_{\bar{س}} = \frac{Б}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{ơ - ن}{ơ - ١}}$$

$$= \frac{٢,٢٨٠٤}{٢} \times \sqrt{\frac{٥ - ٤}{٥ - ١}}$$

$$٠,٥٧ = ٠,٥٧$$

كما أن التوزيع معتدل حيث $\bar{\bar{س}}$ = ط = ١٩

وبفرض أننا قمنا بسحب عينة من هذا المجتمع وكانت هي العينة

أ ب جـ هـ أي ٢١ ، ١٩ ، ١٦ ، ٢٢ وقد تم حساب إحصاءاتها

فكانت:

- $\bar{س}$ للعينة= $\frac{٢١+١٩+١٦+٢٢}{٤} = ١٩,٥$

- ع للعينة = $\sqrt{\frac{(٢١-١٩,٥)^{٢}+(١٩-١٩,٥)^{٢}+(١٦-١٩,٥)^{٢}+(٢٢-١٩,٥)^{٢}}{٤}}$

$= \sqrt{\frac{٢١}{٤}} = ٢,٢٩١٣$

ع المعدلة للعينة = $\sqrt{\frac{٢١}{٣}} = ٢,٦٤٥٨$

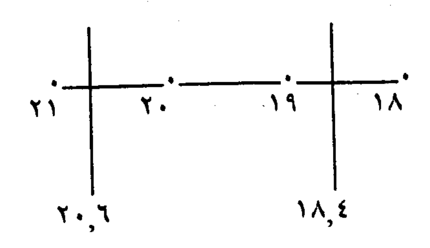
والتقدير إذا كانت σ معلومة :

$$\mu = \bar{س} \pm ى \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{ن - ن}{ن - ١}}$$

$= ١٩,٥ \pm ١,٩٦ \times ٠,٥٧$ بدرجة ثقة ٩٥%

$= ١٩,٥ \pm 1.1$

$$١٨,٤ \leq \mu \leq ٢٠,٦$$



وهذا التقدير مقبول حيث يقع داخل فترة الثقة .

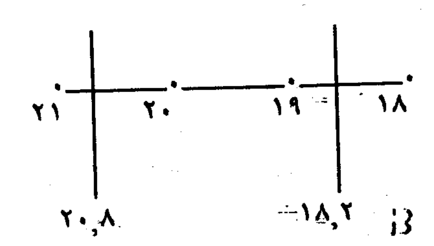
أما إذا كانت σ غير معلومة :

$$= \bar{\text{س}} \pm \text{ى} \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} \times \sqrt{\frac{\text{ق} - \text{ن}}{\text{ق} - ١}}$$

$$= ١٩,٥ \pm ١,٩٦ \times \frac{٢,٦٤٥٨}{٢} \times \sqrt{٠,٢٥}$$

$$= ١٩,٥ \pm ١,٣$$

$$١٨,٢ \leq \mu \leq ٢٠,٨$$



وهذا التقدير مقبول حيث يقع داخل فترة الثقة .

إذاً كبر حجم العينة له تأثير إيجابي في عملية التقدير .

تقدير حجم العينة اللازم للاستدلال منه عن المتوسط(μ)فى المجتمع:

تعتبر العينة هي الوسيلة الوحيدة لدراسة جودة الإنتاج ، وأيضـــا هى التى تستخدم بكثرة فى دراسة الهجرة والعمالـــة والتســويق وبحــث ميزانية الأسرة والخصائص السكانية ...... ، ويتحدد حجم العينـــة بنــاءاً على مجموعة اعتبارات أهمها :

١- **التكلفة** : فكلمـــا زاد حجم العينة زادت تكلفة عملية جمـــع البيانـــات، ومن ثم فإن الاعتمادات المالية المخصصة للباحث تؤثر فـــى حجـــم العينة .

٢- **درجة الثقة المطلوبة للتقدير** : فكلما زادت درجة الدقة فـــى التقديـــر كلما زاد حجم العينة .

٣- **درجة تجانس المجتمع** : فكلما زادت درجة التفاوت بيـــن مفـــردات المجتمع كلما تطلب الزيادة فى حجم العينة .

وقد سبق المعرفة من التوزيع العينى للمتوسطات أن :

$\mu = \bar{س} \pm ى \, \sigma_{\bar{س}}$ عند درجة الثقة المعينة

$\therefore \mu = \bar{س} \pm ى \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$

$\therefore \bar{س} - \mu = \pm ى \quad \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ عند درجة الثقة المعينة

$\therefore \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} = \frac{\bar{س} - \mu}{+ ى}$ عند درجة الثقة المعينة

$\therefore \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} = \frac{\bar{س} - \mu}{\text{ى المقابلة لدرجة الثقة المعينة}}$

وعلى ذلك فلتحديد حجــم العينة ن فإن الأمر يتطلب معرفة كل مـــن σ ، $\bar{س}$ ، μ ، درجة الثقة المطلوبة .

ولما كان فى أغلب الظواهر يكون σ ، μ غـــير معلومـــة ، فـــإن تحديد حجم العينة فى هذه الحالة يتطلب سحب عينة استكشافية لتقديـــر σ ، μ.

مثـــــــال

إذا كان الانحراف المعياري لطول الطلبة فى قسم السياحة ١٢سم ، وأريـــد سحب عينة من الطلبة بحيث لا يختلف متوسط طول الطلبـــة فيـــها عـــن

المتوسط العام باكثر من ٣سم وذلك بدرجة ثقة ٩٥% ، فما هـــو حجـــم العينة المطلوب سحبها من مجتمع الطلبة .

الحـــــل

$$\because \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\text{ى المقابلة لدرجة الثقة المقابلة}}$$

، ∵ درجة الثقة المطلوبة هي ٩٥%

∴ ى المقابلة لدرجة الثقة هذه هي ١,٩٦

$$\therefore \frac{\text{١٢}}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{\text{٣}}{\text{١,٩٦}}$$

$$\therefore \sqrt{\text{ن}} = \frac{\text{١٢} \times \text{١,٩٦}}{\text{٣}} = \text{٧,٨٤}$$

∴ ن = ٦٢ طالب وذلك بدرجة ثقة ٩٥% .

الفصل الثانى

توزيع نسبة عينات المجتمع واستخدامه فى تقدير (B)

يشتمل هذا الفصل على الآتى :

أولا : توزيع نسب عينات المجتمع ووصفه احصائيا .

ثانيا : تقدير النسبة (B) فى المجتمع .

ثالثا : تقدير حجم العينـــة الـــلازم للاســتدلال منـــه عـــن النســـــبة (B) فى المجتمع .



أولا : توزيع نسب عينات المجتمع ووصفه احصائيا .

مثـــــال

مجتمع احصائي يتكون من الأرقـــام ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥

والمطلوب :

١-إيجاد عدد العينات المكونة لهذا المجتمع إذا كان السحب مع الإعادة .

٢-إذا كان المتغير العشوائي هو نسبة الأعداد الفرديـــة بالعينـــة فـــأوجد توزيع نسب عينات المجتمع .

٣-الوصف الإحصائي للتوزيع الناتج ومقارنتـــه بـــالوصف الإحصـــائى المناظر فى المجتمع .

الحــــل

١- إيجاد عدد عينات المجتمع :

∵ السحب مع الاعادة .



∴ عدد العينات الممكن سحبها هو $\text{ن}^{\text{ن}}$ = ٥ ^٢^ = ٢٥ عينة

وبيانات العينات =

{ (١١،١١) ، (١٢،١١) ، (١٣،١١) ، (١٤،١١) ، (١٥،١١)
(١١،١٢) ، (١٢،١٢) ، (١٣،١٢) ، (١٤،١٢) ، (١٥،١٢)
(١١،١٣) ، (١٢،١٣) ، (١٣،١٣) ، (١٥،١٣) ، (١٥،١٣)
(١١،١٤) ، (١٢،١٤) ، (١٣،١٤) ، (١٦،١٤) ، (١٥،١٤)
(١١،١٥) ، (١٢،١٥) ، (١٣،١٥) ، (١٧،١٥) ، (١٥،١٥) }

٢- توزيع نسب عينات المجتمع :

∵ العينة بها مفردتين (رقمين)

∴ نسبة المفردة فى العينة تمثل ٥٠%

∴ بيان نسب المتغير محل الدراسة (نسبة الأعداد الفردية) فـــى عينـــات المجتمع هو :

١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١
$\frac{١}{٢}$ ، صفر ، $\frac{١}{٢}$ ، صفر ، $\frac{١}{٢}$
١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١
$\frac{١}{٢}$ ، صفر ، $\frac{١}{٢}$ ، صفر ، $\frac{١}{٢}$
١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١



∴ التوزيع التكراري للنسب (ب) حيث ب هي نسبة المتغير فى العينة:

ب	علامـــــــات	التكرار (ك)
صفر	////	٤
$\frac{1}{2}$	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
١	~~////~~ ////	٩
المجموع		٢٥

ويسمى هذا التوزيع بتوزيع نسب عينات المجتمع أو التوزيع العيني للنسـبة Sampling Distribution of proportion ولهذا التوزيع أهمية كبيرة فى الدراسات الإحصائية حيث قد نكون بصدد الرغبة فى معرفـــة نســبة معينة فى المجتمع ، كنسبة الطلبة البنين لمجمـــوع الطـــلاب ، أو نســبة المصابين بالبلهارسيا فى ج. م.ع ، أو نسبة البض الفاسد فى شحنة كبـيرة من البيض ، أو نسبة المعيب فى إنتاج مصنع ما ....

(٣- ١) الوصف الاحصائي لتوزيع النسبة فى عينات المجتمع :



الجدول الإحصائي اللازم :

ب	ك	ب ك	ب ٢ ك
٠	٤	٠	٠
$\frac{١}{٢}$	١٢	٦	٣
١	٩	٩	٩
المجموع	٢٥	١٥	١٢

$\bar{س}_{ب}$ (متوسط النسبة فى عينات المجتمع) = $\frac{\text{مجـ ب ك}}{\text{مجـ ك}} = \frac{١٥}{٢٥} = ٠.٦$

$\sigma^2_{ب}$ (تباين النسبة فى عينات المجتمع) = $\frac{\text{مجـ ب}^٢\text{ك}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ب ك}}{\text{مجـ ك}}\right)^٢$

$= \frac{١٢}{٢٥} - \left(\frac{١٥}{٢٥}\right)^٢$

$= ٠,٤٨ - ٠.٣٦$

$= ٠,١٢$

∴ $\sigma_{ب}$ (الانحراف المعياري للنسبة فى عينات المجتمع) = $\sqrt{١٢}$

ويسمى بالخطأ المعياري للنسبة

$= ٠,٣٤٦$



ويمكن إجراء الوصف الإحصائي السابق باستخدام الجدول الإحصـــــائي التالي :

ب	ك	$\overline{\text{ك}}$ (التكرار النسبى) (الاحتمال الاحصائى)	ب $\overline{\text{ك}}$	ب ٢ $\overline{\text{ك}}$
٠	٤	٠,١٦	٠	٠
$\frac{1}{2}$	١٢	٠,٤٨	٠,٢٤	٠,١٢
١	٩	٠,٣٦	٠,٢٦	٠,٣٦
المجموع	٢٥	١	٠,٦	٠,٤٨

$\therefore \quad \overline{\text{س}}_{\text{ب}} = \text{مجـ}_{\text{ب}} \overline{\text{ك}} = ٠,٦$

$، \quad \sigma^2_{\text{ب}} = \text{مجـ}_{\text{ب}} {}^{٢} \overline{\text{ك}} - \text{مجـ} (\text{ب} \overline{\text{ك}})^{٢}$

$= \text{مجـ}_{\text{ب}} {}^{٢} \overline{\text{ك}} - (\overline{\text{س}}_{\text{ب}})^{٢}$

$= ٠,٤٨ - ٠,٣٦$

$= ٠,١٢$

$، \quad \sigma_{\text{ب}} = \sqrt{٠,١٢} = ٠,٣٤٦$ وهى نفس النتيجة السابقة

(٣ – ٢) الوصف الإحصائي للنسبة فى المجتمع :

* متوسط النسبة فى المجتمع B :

$$B = \frac{\text{مجموع عدد الأرقام الفردية فى المجتمع}}{\text{العدد الكلى لأرقام المجتمع}}$$

$$= \frac{٣}{٥} = ٠,٦$$

* تباين النسبة فى المجتمع σ^2_B :

$\sigma^2_B = B \times k$ [1] حيث k هي النسبة المكملة .

= النسبة فى المجتمع × النسبة المكملة لها

= $B\ (١ - B)$

= ٠,٦ × ٠,٤ = ٠,٢٤

* الانحراف المعياري للنسبة فى المجتمع σ_B

$$\sigma_B = \sqrt{B\ (١ - B)}$$

[1] لهذا القانون اثبات لكن يخرج عن النطاق الحالي

$= \sqrt{٠,٦ \times ٠,٤}$

$= ٠,٤٨٩$

(٣ –٣) العلاقة بين الخصائص الإحصائية فى المجتمع والنسبة فى توزيع عينات المجتمع :

بمقارنة نتائج (٣-٢) مع نتائج (٣-٣) تتضح العلاقات التالية :

* B = ب = ٠,٦ فى المثال

* $\sigma_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{ن}}$ حيث ن حجم العينة والعلاقة صحيحة لأن

$= \frac{٠,٤٨٩}{\sqrt{٢}}$

$= ٠,٣٤٦$ وحيث $\sigma_{ب} = ٠,٣٤٦$

* $\sigma_{ب} = \frac{\sqrt{B(١-B)}}{\sqrt{ن}} = \sqrt{\frac{B(١-B)}{ن}}$

$\sigma_{ب} = \sqrt{\frac{ب(١-ب)}{ن}}$ فى حالة B غير معلومه

* $\sigma_{ب} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{ك - ن}{ك - ١}}$ إذا كان السحب بدون إرجاع



ثانيا : تقدير النسبة (B) فى المجتمع :

B = ب ± ى σب عند درجة الثقة المطلوبة

حيث :

B : النسبة فى المجتمع .

ب : النسبة فى العينة .

± ى : الفترة المعيارية المقابلة لفترة الثقة المطلوبة (الاحتمال المطلوب) .

σب : الخطأ المعياري للنسبة فى العينة وهو $\sqrt{\frac{ب(١-ب)}{ن}}$

حيث ن حجم العينة .

مثـــــال١

إذا كان عدد الطلبة بإحدى الكليات يبلغ ٢٤٠٠ ، ولدراسة عـــدد الطلبــة المنتسبين بالكلية بأسلوب العينة ، تم سحب عينة عشوائية حجمـــها ٣٩٠



طالب ، فوجد أن منهم ١١٧ طالبا منتسبا ، **والمطلوب** تقدير نسبة الطلبة المنتسبين بالكلية وكذا عددهم بدرجة ثقة ٩٥% .

الحـــــل

∵ B = ب ± ى σب عند درجة الثقة المطلوبة .

حيث B هى النسبة فى المجتمع ، ب هي النسبة فى العينة ، ± ى هي الفترة المعيارية المقابلة لدرجة الثقة المطلوبة ، σب هي الخطأ المعياري للنسبة .

، ∵ ب = $\frac{١١٧}{٢٤٠٠}$ = ٠,٣

، ∵ ± ى عند درجة ثقة ٩٥% هي ± ١,٩٦ .

، ∵ σب = $\sqrt{\frac{ب(١-ب)}{ن}}$ حيث ن حجم العينة ، واعتبار المجتمع غير محدود .

= $\sqrt{\frac{٠,٣(١-٠,٣)}{٣٩٠}}$ = ٠,٠٢٣٢

B = ٠,٣ ± ١,٩٦ × ٠,٠٢٣٢ بدرجة ثقه ٩٥%



= ٠,٣ ± ٠,٠٤٥

٠,٣٤٥ ≥ B ≥ ٠,٢٥٥

%٣٤,٥ ≥ B ≥ %٢٥,٥

%٣٤,٥ × ٢٤٠٠ ≥ B ≥ %٢٥,٥ × ٢٤٠٠

٨٢٨ ≥ B ≥ ٦١٢ طالب

تفسير درجة الثقة :

أنه إذا قمنا بسحب عدد كبير جدا من العينات ذات الحجم ٣٩٠ طالب سنجد أن ٩٥% من هذه العينات يكون نسبة الطلبة المنتسبين لن تخرج عن التقدير السابق ، وأن ٥% فقط من هذه العينات هي التى تخرج (تشذ) عن ذلك التقدير .

مثـــال ٢

فى استطلاع الرأى العام عن موقف أحد المرشحين فى الانتخابات ، تم سحب عينة حجمها ١٠٠ ناخب وقد دلت نتائج العينة ؟



أن ٥٥% منها تؤيد هذا المرشح ، والمطلوب تقدير نسبة المؤيدين لـــدى

جميع الناخبين بدرجة ثقة ٩٩% .

الحـــــل

∵ B = ب ± σب عند درجة ثقه ٩٩%

∴ B = ٠,٥٥ ± ٢,٥٨ × $\sqrt{\frac{٠,٥٥ \times ٠,٤٥}{١٠٠}}$

= ٠,٥٥ ± ٠,١٣

٠,٦٨ ≥ B ≥ ٠,٤٢

٦٨% ≥ B ≥ ٤٢% بدرجة ثقه ٩٦%

مثـــــال٣

سحبت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ بيضه مـــن شـــحنة بيـــض ،

وبالفحص وجد أن البيض الفاسد فى العينة ٣٠ بيضه ، والمطلوب احســب

فترة الثقة على نسبة البيض الفاسد فى المجتمع بدرجة ثقه ٩٥% .



الحـــــل

$\because$ B = ب ± ى $\sigma_{ب}$ عند درجة ثقه ٩٥%

$$= ٠,٣ \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٠,٣ \times ٠,٧}{١٠٠}}$$

$$= ٠,٣ \pm ١,٩٦ \times ٠,٠٤٦$$

$$= ٠,٣ \pm ٠,٠٩$$

$$٠,٢١ \leq B \leq ٠,٣٩$$

٢١% $\leq$ B $\leq$ ٣٩% بدرجة ثقه ٩٥%

وباعتبار أن هذا المجتمع هو سحب بدون إرجاع

$\therefore$ B = ب ± ى $\sigma_{ب}$ $\sqrt{\frac{ن - ن}{ن - ١}}$

$$= ٠,٣ \pm ١,٩٦ \times ٠,٠٤٦ \times \sqrt{\frac{١٠٠ - ٣٠}{١٠٠ - ١}}$$

$$= ٠,٣ \pm ١,٩٦ \times ٠,٠٤٦ \times ٠,٨٨$$

$$= ٠,٣ \pm ٠,٠٨$$

٢٢% $\leq$ B $\leq$ ٣٩% بدرجة ثقه ٩٥%



ثالثا : تقدير حجم العينة اللازم للاستدلال منه عن النسبة B فى المجتمع:

سبق المعرفة من التوزيع العينى للنسبة فى المجتمع أن :

$B = \text{ب} \pm \text{ى}\ \sigma_{\text{ب}}$ عند درجة الثقة المطلوبة

$\therefore B - \text{ب} = \pm \text{ى}\ \sigma_{\text{ب}}$

$\therefore \sigma_{\text{ب}} = \dfrac{B - \text{ب}}{\pm \text{ى}}$ عند درجة الثقة المطلوبة

$\therefore \sqrt{\dfrac{\text{ب}(1-\text{ب})}{\text{ن}}} = \dfrac{B - \text{ب}}{\pm \text{ى}}$

مثـــــال ١

ما هو حجم العينة المطلوب سحبها من مجتمع معين بحيث لا تختلف نسبة النساء فيها عن النسبة العامة بأكثر من ٢% بدرجة ثقة ٩٩% ، إذا علمت أن نسبة النساء فى العينة لمثل هذا المجتمع تساوي ٢٥% .

الحـــــل

$\because \sqrt{\dfrac{\text{ب}(1-\text{ب})}{\text{ن}}} = \dfrac{B - \text{ب}}{\pm \text{ى}}$ عند درجة الثقة المطلوبة



$\therefore \sqrt{\frac{\text{٠,٢٥} \times \text{٠,٧٥}}{\text{ن}}} = \frac{\text{٠,٠٢}}{\text{٢,٥٨}}$ عند درجة ثقه ٩٩%

$\therefore \frac{\text{٠,٤٣٣}}{\sqrt{\text{ن}}} = \frac{\text{٠,٠٢}}{\text{٢,٥٨}}$

$\therefore \sqrt{\text{ن}} = \frac{\text{٢,٥٨} \times \text{٠,٤٣٣}}{\text{٠,٠٢}}$

$\therefore \sqrt{\text{ن}} = \text{٥٥,٨٥}$

$\therefore \text{ن} = \text{٣١٢٠}$ فردا بدرجة ثقه ٩٩%

مثـــــال٢

إذا أردنا تقدير نسبة السائحين الألمان فى فوج سياحى أوروبي فمـــا هـــو حجم العينة اللازم لإجراء هذا التقدير بحيث لا تختلف النسبة فـــى العينـــة عن النسبة فى المجتمع بمقدار ٥% بدرجة ثقه ٩٩% .

الحـــــل

$\therefore \sqrt{\frac{\text{ب}(\text{١}-\text{ب})}{\text{ن}}} = \frac{B - \text{ب}}{\pm \text{ى}}$ عند درجة الثقة المطلوبة

، $\therefore$ ب وهى النسبة فى العينة غير معلومة فى هذا المثال



∴ يتم اعتبار[1] النسبة فى العينة تساوى $\frac{1}{2}$

$$\therefore \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{ن}} = \frac{0.05}{2.58}$$ عند درجة الثقة ٩٩%

$$\therefore \frac{\sqrt{0.25}}{\sqrt{ن}} = \frac{0.05}{2.58}$$

$$\therefore \sqrt{ن} = \frac{0.5 \times 2.58}{0.05}$$

$$= 25.8$$

$$\therefore ن = 665.64$$

$$= 666$$ سائح

[1] يلجأ البعض إلى إيجاد نسبة تقريبية من دراسات مماثلة سابقة .

الفصل الثالث

التوزيع التكراري لذات الحدين

أولا : تمهيد :

نعلم من دراستنا السابقة أن ذات الحدين عبارة عن مقدار جـــبرى يتكون من حدين مثل المقدار ص + س ، كما نعلم أن مفكوك ذات الحدين هـــو عدد نواتج ضرب ذات الحدين عدد من المرات ويتضح ذلـــك فيمـــا يلى :

(ص + ك) = ص + ك

$(ص + ك)^{٢} = ص^{٢} + ٢\ ص\ ك + ك^{٢}$

$(ص + ك)^{٣} = ص^{٣} + ٣\ ص^{٢}\ ك + ٣\ ص\ ك^{٢} + ك^{٣}$



(ص + ك)^{٥} = ص^{٥} + ٥ ص^{٤} ك + ١٠ ص^{٣} ك^{٢} + ١٠ ص^{٢} ك^{٣}

+ ٥ ص ك^{٤} + ك^{٥}

(ص + ص)^{١٠} = ص^{١٠} + ١٠ ص^{٩} ك + ٤٥ ص^{٨} ك^{٢} + ١٢٠ ص^{٧} ك^{٣}

+ ٢٥٢ ص^{٥} ك^{٥} + ٢١٠ ص^{٤} ك^{٦} + ١٢٠ ص^{٣} ك^{٧}

+ ٤٥ ص^{٢} ك^{٨} + ١٠ ص ك^{٩} + ك^{١٠}

ملاحظات على مفكوك ذات الحدين :

١- عدد الحدود فى أى مفكوك عبارة عن ن + ١ حيث هـى ن الأس ففى المفكوك (ص+ك)^{٢} نجد أن عدد الحدود ٣ حيث ٢ + ١ ، وفى المفكوك (ص + ٥)^{٥} نجد أن عدد الحدود ٦ حيث ٥ + ١ وهكذا .

٢- مجموع عدد معاملات الحدود عبارة عن ٢^{ن} ففى المفكوك (ص + ك)^{٢} نجد أن عدد المعاملات ٤ حيث ٢ ^{٢} وهى :

ص^{٢} + ٢ ص ك + ك^{٢} وهكذا



٣- معامل أي حد عبارة عن $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$ حيث ر هـي (رتبة الحد – ١) ففى المفكوك (ص + ك)^{١٠} نجد أن معامل حده الأول يساوى واحد حيث :

$^{١٠}ق_{٠} = \frac{٧!}{٠!\,٧!} = ١$ ، وأن معامل حده الثانى يساوى ١٠

حيث $^{١٠}ق_{٠} = \frac{١٠!}{١!\,٩!} = ١٠$، وأن معامل حده الثامن يساوى ١٢٠

حيث $^{١٠}ق_{٧} = \frac{١٠!}{٧!\,٣!} = ١٢٠$ وهكذا .

ثانيا : متغير ظهور الصورة عند رمى قطعة نقود عدة مرات كظاهرة ذات متغيرين كتابة وصورة :

عند رمى قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور الصورة يساوي $\frac{١}{٢}$ ويسمى ذلك بالاحتمال الرياضى (نسبة) ، وعند رمى قطعة النقود مرتين فمن المحتمل أن لا نحصل على الصورة فى أى منهما رغم أن الاحتمال الرياضى لظهور الصورة فى كل مره يساوى $\frac{١}{٢}$، لكن إذا كررنا رمى قطعة النقود عدد كبير جداً من المرات فإننا نجد أن الصورة



ستظهر فى حوالى ٥٠% من الحالات ، وهـذا يقودنـا إلـى التعريـف الإحصائي للاحتمال ، فالاحتمال بالمعنى الإحصائي هو عبارة عن تكـوار نسبى أى التكرار النسبي لوقوع الحدث ، ويعتـبر المعنـى الإحصـائي للاحتمال أقرب إلي منطق الأشياء من المعنى الرياضي .

ثالثا : المجتمع الإحصائي المتوقع لمتغير ظهور الصورة عند رمى قطعة النقود عدة مرات :

إذا رمزنا لظهور الصورة بالرمز ص ، وللكتابة بـالرمز ك ، وإذا رمينا قطعة النقود (ص + ك) ثلاث مرات مثلا فإن المجتمع الإحصـائي المتوقع لمتغير ظهور الصورة هو ٢ ^٣^ = ٨ وبيانها كما يلى :

المتغير (ظهور الصورة)	بيان لنواتج الرمى	عدد مرات ظهور المتغير فى الثلاث رميات
ص ص ص	أي ظهور الصورة فى الثلاث رميات	٣
ص ص ك	أي ظهور الصورة مرتين فى الثلاث رميات	٢
ص ك ص	أي ظهور الصورة مرتين فى الثلاث رميات	٢
ص ك ك	أي ظهور الصورتمرة واحد فى الثلاث رميات	١



تابع الجدول

المتغير (ظهور الصورة)	بيان لنواتج الرمى	عدد مرات ظهور المتغير فى اللاث رميات
ك ك ك	أي عدم ظهور الصورة فى الثلاث رميات	٠
ك ك ص	أي ظهور الصورة مرة واحدة فى الثلاث رميات	١
ك ص ك	أي ظهور الصورة مرة واحدة فى الثلاث رميات	١
ك ص ص	أي ظهور الصورة مرة مرتين فى الثلاث رميات	٢

والتوزيع التكراري المتوقع فى هذه الحالة هو :

المتغير	علامات	تكرار (ك)
٠	/	١
١	///	٣
٢	///	٣
٣	/	١
المجموع		٨

يلاحظ أن مدى المتغير يتراوح من الصفـــر إلـــى ٣ ، كمـــا يلاحـــظ أن التكرارات هى مفكوك ذات الحدين $(ص + ك)^{٣}$. وعلى ذلك فـــالتوزيع التكراري لمتغير ظهور الصورة إذا كان عدد مرات الرمي يســـاوي ١٠ هو :



متغير ظهور الصورة	التكرار المطلق (ك)	التكرار النسبي (الاحتمال الإحصائي)
٠	١	٠,٠٠١
١	١٠	٠,٠١٠
٢	٤٥	٠,٠٤٤
٣	١٢٠	٠,١١٧
٤	٢١٠	٠,٢٠٥
٥	٢٥٢	٠,٢٤٦
٦	٢١٠	٠,٢٠٥
٧	١٢٠	٠,١١٧
٨	٤٥	٠,٠٤٤
٩	١٠	٠,٠١٠
١٠	١	٠,٠٠١
المجموع	١٠٢٤	١

وأنه من الممكن إيجاد هذا التوزيع باستخدام التوافيق كما فى الجدول التالي ، حيث ح هي احتمال نجاح ظهور الصورة ، ل هي احتمال فشل ظهور الصورة ، ح ل هو احتمال النجاح والفشل معاً (قاعدة ضرب الاحتمالات) .

متغير ظهور الصورة	$ق^{ن}_{ر}$ أي معامل الحد فى المفكوك أو التكرار المطلق فى التوزيع التكراري	$ح^{ر} ل^{ن-ر}$ أي الاحتمال الرياضي لظهور الصورة فى نواتج الرمى	$ق^{ن}_{ر} ح^{ر} ل^{ن-ر}$ أي الاحتمال الإحصائي للنتائج أو التكرار النسبي لنتائج
٠	١	$(\frac{1}{2})^{0}(\frac{1}{2})^{10}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٠٠١
١	١٠	$(\frac{1}{2})^{1}(\frac{1}{2})^{9}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٠١٠
٢	٤٥	$(\frac{1}{2})^{2}(\frac{1}{2})^{8}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٠٤٤
٣	١٢٠	$(\frac{1}{2})^{3}(\frac{1}{2})^{7}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,١١٧
٤	٢١٠	$(\frac{1}{2})^{4}(\frac{1}{2})^{6}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٢٠٥
٥	٢٥٢	$(\frac{1}{2})^{5}(\frac{1}{2})^{5}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٢٤٦
٦	٢١٠	$(\frac{1}{2})^{6}(\frac{1}{2})^{4}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٢٠٥
٧	١٢٠	$(\frac{1}{2})^{7}(\frac{1}{2})^{3}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,١١٧
٨	٤٥	$(\frac{1}{2})^{8}(\frac{1}{2})^{2}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٠٤٤
٩	١٠	$(\frac{1}{2})^{9}(\frac{1}{2})^{1}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٠١٠
١٠	١	$(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^{0}$ = ٠,٠٠٠٠٩٧	٠,٠٠١
المجموع	١٠٢٤	٠,٠٠٩٧٧	١

وقد أمكن للعالم برنولـــي Beronolli إيجـاد هــذا التوزيــع بالقــاعدة

أ = $ق^{ن}_{ر} ح^{ر} ل^{ن-ر}$ وسميت بقاعدة برنولى وتعنـــى إذا كــان س متغــير



عشوائي (متغير ظهور الصورة) يمثل ظاهرة وكان لهذه الظاهرة نـاتجين فقط هما النجاح باحتمـال ح والفشـل باحتمـال ل أي (١- ح) ، فـإن التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو احتمال عدد مرات النجاح إذا أجريـت قاعدة برنولى عدد من المرات .

رابعا : الوصف الإحصائى لمتغير ظهور الصورة عند رمى قطعة نقـود عدة مرات كظاهرة ذات حدين :

الجدول الإحصائي اللازم :

متغير ظهور الصورة (س)	التكرار النسبي (الاحتمال الإحصائي)	التكرار المطلق (ك)	ك س	ك س٢	تكرار متجمع صاعد
٠	٠,٠٠١	١	٠	٠	١
١	٠,٠١٠	١٠	١٠	١٠	١١
٢	٠,٠٤٤	٤٥	٩٠	١٨٠	٥٦
٣	٠,١١٧	١٢٠	٣٦٠	١٠٨٠	١٧٦
٤	٠,٢٠٥	٢١٠	٨٤٠	٣٣٦٠	٣٨٦
٥	٠,٢٤٦	٢٥٢	١٢٦٠	٦٣٠٠	٦٣٨
٦	٠,٢٠٥	٢١٠	٨٤٠	٧٥٦٠	٨٦٨
٧	٠,١١٧	١٢٠	٣٦٠	٥٨٨٠	٩٦٨
٨	٠,٠٤٤	٤٥	٩٠	٢٨٨٠	١٠١٣
٩	٠,٠١٠	١٠	١٠	٨١٠	١٠٢٣
١٠	٠,٠٠١	١	٠	١٠٠	١٠٢٤
المجموع	١	١٠٢٤	٥١٢٠	٢٨١٦٠	/



(١) الوسط الحسابي ($\overline{س}$) :

$$\overline{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{مجـ\ ك} = \frac{٥١٢٠}{١٠٢٤} = ٥$$

(٢) الوسيط (ط) :

$$ط = ب + \frac{ت_١ \times ل_١}{ت_١ + ت_٢}$$ (مبادىء الإحصاء)

$$= ٤,٥ + \frac{١٢٦ \times ١}{١٢٦ + ١٢٦} = ٤,٥ + ٠,٥ = ٥$$

(٣) المنوال (أ) :

$$ط = ب + \frac{ت_١ \times ل_١}{ت_١ + ت_٢}$$ (مبادىء الإحصاء)

$$= ٤,٥ + \frac{٢١٠ \times ١}{٢١٠ + ٢١٠} = ٤,٥ + ٠,٥ = ٥$$

(٤) الانحراف المعياري (ع) :

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ\ س^٢ ك}{ن} - \frac{(مجـ\ س\ ك)^٢}{ن^٢}}$$ (مبادىء الإحصاء)

$$= \frac{٢٨١٦٠}{١٠٢٤} - \frac{(٥١٢٠)^٢}{(١٠٢٤)^٢} = ١,٥٨$$

(٥) معامل الالتواء = $\frac{\bar{س} - ط أ و م}{ع}$

= $\frac{٥ - ٥}{١,٥٨}$ = صفر

(٦) معامل التفرطح :

لإيجاد هذا المعامل يستلزم إيجاد الجدول الإحصائي اللازم التالى:

س	ك	$(س - \bar{س})$ ح	ح ك	$ح^2$ ك	$ح^3$ ك	$ح^4$ ك
٠	١	-٥	-٥	٢٥	١٢٥	٦٢٥
١	١٠	-٤	-٤٠	١٦٠	٦٤٠	٢٥٦٠
٢	٤٥	-٣	-١٣٥	٤٠٥	١٢١٥	٣٦٤٥
٣	١٢٠	-٢	-٢٤٠	٤٨٠	٩٦٠	١٩٢٠
٤	٢١٠	-١	-٢١٠	٢١٠	٢١٠	٢١٠
٥	٢٥٢	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٦	٢١٠	١	٢١٠	٢١٠	٢١٠	٢١٠
٧	١٢٠	٢	٢٤٠	٤٨٠	٩٦٠	١٩٢٠
٨	٤٥	٣	١٣٥	٤٠٥	١٢١٥	٣٦٤٥
٩	١٠	٤	٤٠	١٦٠	٦٤٠	٢٥٦٠
١٠	١	٥	٥	٢٥	١٢٥	٦٢٥
المجموع	١٠٢٤	صفر	صفر	٢٥٦٠	٦٣٠٠	١٧٩٢٠



$$\because \text{العزم الثانى} = \frac{\text{مج ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مج ك}} - \left(\frac{\text{مج ح ك}}{\text{مج ك}}\right)^{٢}$$

$$= \frac{٢٥٦٠}{١٠٢٤} - \left(\frac{\text{صفر}}{١٠٢٤}\right)^{٢}$$

$$= ٢,٥ \quad \text{(التباين)}$$

$$\text{،} \because \text{العزم الثالث} = \frac{\text{مج ح}^{٣}\text{ك}}{\text{مج ك}} - \left[٣ \times \frac{\text{مج ح ك}}{\text{مج ك}} \times \frac{\text{مج ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مج ك}} + ٢\left(\frac{\text{مج ح ك}}{\text{مج ك}}\right)^{٢}\right]$$

$$= \text{صفر} - \left[\text{صفر} + \text{صفر}\right]$$

$$= \text{صفر}$$

$$\text{،} \because \text{معامل الالتواء} = \frac{\text{مربع العزم الثالث}}{\text{مكعب العزم الثانى}} = \frac{\text{م}_{٣}^{٢}}{\text{م}_{٢}^{٣}}$$

$$= \frac{(٠)^{٢}}{(٢,٥)^{٣}} = \text{صفر}$$

$$\text{، العزم الرابع} = \frac{\text{مج ح}^{٤}\text{ك}}{\text{مج ك}} - ٣\left(\frac{\text{مج ح ك}}{\text{مج ك}}\right)^{٢} - ٤ \times \frac{\text{مج ح ك}}{\text{مج ك}} \times \frac{\text{مج ح}^{٣}\text{ك}}{\text{مج ك}}$$

$$+ ٦\left(\frac{\text{مج ح ك}}{\text{مج ك}}\right)^{٢} \times \frac{\text{مج ح}^{٢}\text{ك}}{\text{مج ك}}$$

$$= \frac{١٧٩٢٠}{١٠٢٤} - ٣ \times \left(\frac{\text{صفر}}{١٠٤٢}\right)^{٢} - ٤ \times \frac{\text{صفر}}{١٠٢٤} \times \frac{٦٣٠٠}{١٠٢٤}$$

$$+ ٦ \times \text{صفر} = ١٧,٥$$



، ∵ معامل التفرطح = $\frac{\text{العزم الرابع}}{\text{مربع العزم الثاني}} = \frac{م_4}{م_2^2}$

$$= \frac{17.5}{(2.5)^2} = 2.8 \approx 3$$

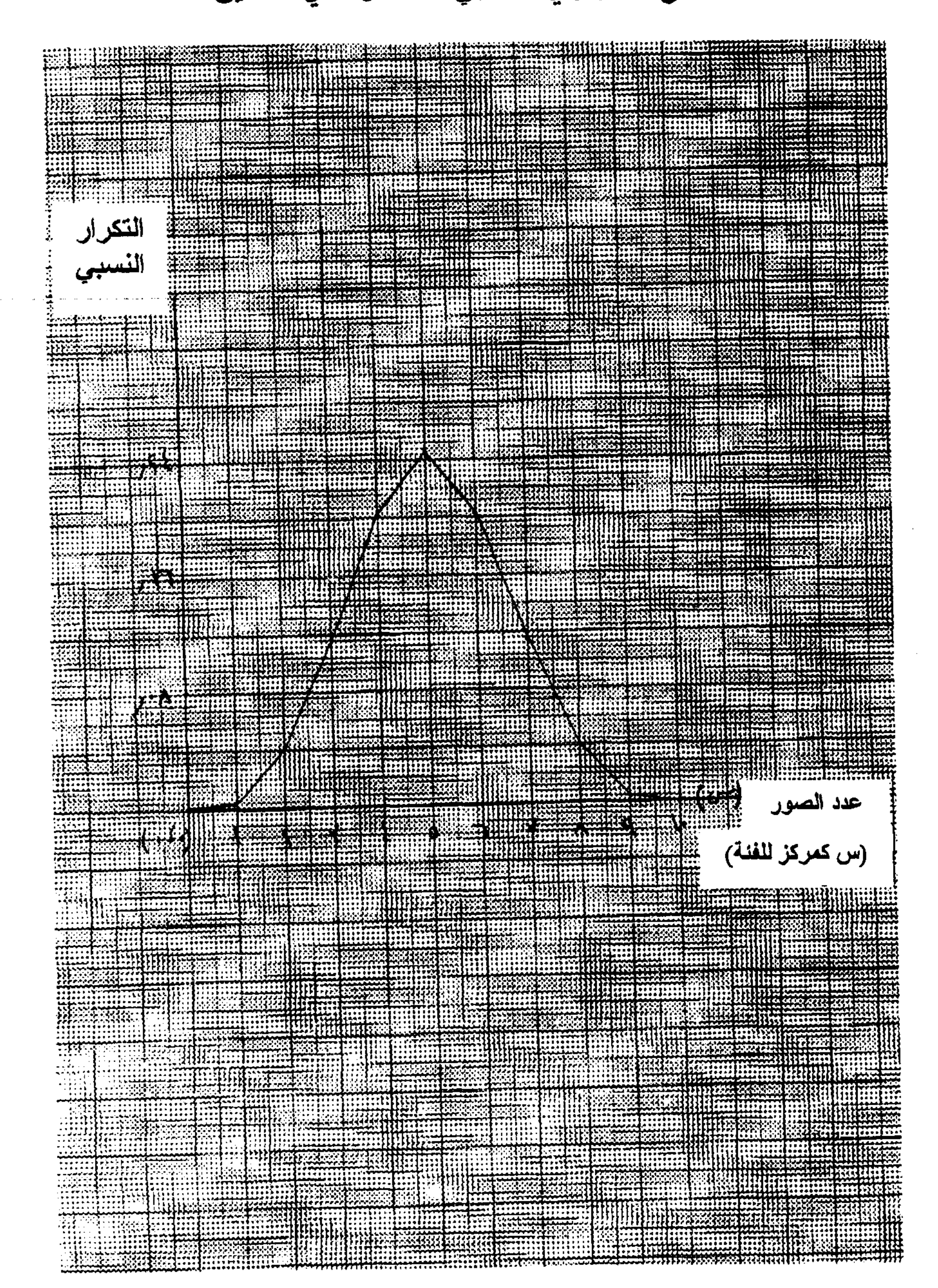
أي أن توزيع ذات الحدين هذا أقل تفرطحا من التوزيع الطبيعي المعياري

(٧) العرض البيانى للتوزيع التكراري المعتدل لذي الحدين هذا :

يتأتى هذا العرض على أنه مضلع تكراري معتدل ، وهذا ما يوضحه الشكل البياني التالي ، وأنه بزيادة (ن) فإن المضلع هذا سيتحول إلى المنحنى الطبيعي ، ومن ثم يمكن الاستفادة من خصائص التوزيع الطبيعي فى إيجاد الإحتمال الإحصائي للظواهر التى تتبع التوزيع المعتدل لذي الحدين .

(٨) يسمي المتوسط الحسابي لذي الحدين بالتوقع ويرمز له بالرمز (μ)، ويمكن حسابه بطريقة اسهل عن ذى قبل كما يلى :

المضلع التكراري النسبي المعتدل لذي الحدين





μ = ن ح[١]

حيث :

μ : التوقع

ن : عدد الوحدات

ح : احتمال النجاح للوحدة الواحدة

وينطبق هذا القانون على المثال محل الدراسة :

∴ μ = ١٠ × $\frac{١}{٢}$

= ٥ وهى نفس النتيجة السابقة

- وكذلك الانحراف المعياري لذى الحدين :

ع = $\sqrt{\text{ن ح ل}}$ [٢]

حيث :

ع : الانحراف المعياري لذي الحدين .

---

(١) ، (٢) لهما اثبات رياضي لكن يخرج ذلك عن نطاق هذا الكتاب

ن : عدد الوحدات ، ح : احتمال النجاح للوحدة الواحدة

ل : احتمال الفشل أى الأحتمال المكمل (١ - ح) .

وبنطبق هذا القانون على المثال محل الدراسة :

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{١٠ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}$$

= ١,٥٨ وهى نفس النتيجة السابقة .

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{ل} - \text{ح}}{\text{ع}}$$

$$= \frac{٠,٥ - ٠,٥}{١,٥٨} = \text{صفر}$$ وهى نفس النتيجة السابقة

$$\text{معامل التفرطح} = ٣ + \frac{١ - ٦ \text{ ح ل}}{\text{ع}}$$

$$= ٣ + \frac{١ - ٦ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}{١,٥٨}$$

$$= ٣ + \frac{-٠,٥}{١,٥٨} = ٣ - ٠,٣١٦٥ = ٢,٧ \approx ٣$$

وهى تقريبا نفس النتيجة السابقة

(٩) أن اعتدال التوزيع التكراري لذي الحدين هذا راجع إلى أن احتمال (ح) يساوى $\frac{١}{٢}$ واحتمال (ل) يساوي $\frac{١}{٢}$ ولذلك إذا كان احتمال ح $> \frac{١}{٢}$



فتوزيع ذى الحدين يكون ملتوى ناحية اليسار (التواء سالب) ، أمـــا إذا كان احتمال ح < $\frac{1}{2}$ فتوزيع ذى الحدين يكون ملتوي ناحية اليمين (التواء موجب) ، ويتضح ذلك عند تناول الأمثلة التطبيقية ، كمـــا أن μ = ن ح مهما كانت قيمة ح .

(١٠) معنى الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين :

نفرض أننا القينا قطعة نقود غير معيوبة عدد كبير جدا من المـــرات ولتكن ١٦٠٠ مره ، فإننا نتوقع أن نحصل على الصورة فى نصـــف عدد هذه المرات أي حوالي ٨٠٠ مره وأيضا على الكتابة فـــى ٨٠٠ مره ، ويعطينا الوسط الحسابي لتوزيع ذات الحديـــن (ن ح) هـــذا التوقع النظري حيث ن ح = ١٦٠٠ × $\frac{1}{2}$ = ٨٠٠ مره . لكن إذا قمنـــا بإجراء هذه التجربة فعلا فقد نحصل مثلا على ٨٠٧ صـــوره ، وإذا أجريناها مرة ثانية فقد نحصل على ٧٩٥ صوره ، وإذا أجريناها مرة ثالثة ، ورابعة ، .... سنحصل على قيم تقترب من الرقم ٨٠٠ وذلـك رغم أننا نجرى التجربة على نفس قطعة النقود ونلقيها فى كل تجربـــة ١٦٠٠ مره . وإذا كانت قطعة النقود غير معيوبة فعلا فإن هذا الفرق



يرجع إلى عوامل غير معروفة وهي التى تسمي بعوامل الصدفة ، أما إذا كانت قطعة النقود معيوبة أو أن طريقة رمى القطعة غير سليمة فقد تنتج فروق آخرى ترجع لنوع آخر من الأخطاء وهو ما يسمى بخطأ التحيز ، ويساعدنا الانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين على معرفة هذه الفروق وهل ترجع إلى عوامل الصدفة فقط أو أن عوامل خطأ التحيز قد تسربت إليها ، فإذا كان الفرق بين التوقع النظرى والناتج الفعلي يقل عن قيمة وحدة انحراف معياري أي $\sqrt{\text{ن ح ل}}$ فالاحتمال كبير أن يكون هذا الفرق راجعا إلى عوامل الصدفة فقط ، أما إذا كان هذا الفرق يزيد عن ٣ $\sqrt{\text{ن ح ل}}$ أي ثلاثة أصناف الانحراف المعياري فإن الاحتمال كبير أن يكون هذا الفرق راجعا إلى عوامل التحيز ، وتبين لنا دراسة المنحنى[١] الطبيعي حدود واحتمالات هذه الفروق (الأخطاء) . وبالنسبة لمثالنا هذا وجدنا أن التوقع النظرى ح = ١٦٠٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٨٠٠ وأن الانحراف المعياري لها = $\sqrt{١٦٠٠ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}$ = ٢٠ أي أننا إذا حصلنا على عدد من الصور يتراوح بين ٨٢٠ ، ٧٨٠ فإن هذا

---

[١] يؤول منحى التوزيع التكراري المعتدل لدى الحدين إلى المنحى الطبيعي عندما تكبر وتقترب من



الفرق عن التوقع النظري يرجع إلى عوامل الصدفة ويسمي بـالفرق الظاهري (غير المعنوي) ، أما إذا كان الناتج الفعلى يقع خارج مجـال (نِ ح ± ٣ $\sqrt{\text{نِ ح ل}}$) أي لا يقع داخل المجال (٨٦٠ – ٧٢٠) فمـن المؤكد أن هذا الفرق يرجع إلى عوامل آخرى غير الصدفة ويكـون الفرق فى هذه الحالة فرقا جوهريا .

خامسا : أمثله تطبيقية :

مثـــال

إذا كان ٢٠% من إنتاج أحد الفنادق إنتاج معيب ، أخـذت عينـة عشوائية عددها ٤ وحدات من هذا الإنتاج والمطلوب :

١-أوجد احتمال أن يكون بالعينة وحدة واحدة تالفة .

٢-أوجد احتمال ألا يكون بالعينة أي وحدة تالفة .

٣-أوجد احتمال أن يكون بالعينة وحدتين تالفتين على الأكثر .

الحـــل

∵ احتمال وجود وحدة واحدة تالفة فى إنتاج الفندق (ح) = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ٠,٢



∴ احتمال عدم وجود وحدة تالفة فى إنتاج الفندق (ل) = ١ – ٠,٢

= ٠,٨

∴ احتمال وجود وحدة واحدة تالفة فى العينة = $^{ن}ق_{ر}\ ح^{ر}\ ل^{ن-ر}$

= $^{٤}ق_{١}\ (٠,٢)^{١}\ (٠,٨)^{٣}$

= ٤ × ٠,٢ × ٠,٥١٢

= ٠,٤٠٩٦

، احتمال عدم وجود أي وحدة تالفة فى العينة = $^{٤}ق_{٠}\ (٠,٢)^{٠}\ (٠,٨)^{٤}$

= ٠,٤٠٩٦

، احتمال وجود وحدتين تالفتين فى العينة = $^{٤}ق_{٢}\ (٠,٢)^{٢}\ (٠,٨)^{٢}$

= ٠,١٥٣٦

، احتمال وجود وحدتين تالفتين على الأكثر فى العينة

= ح (س=٠)+ح(ر=١)+ح(س=٢)

= ٠,٤٠٩٦ + ٠,٤٠٩٦ + ٠,١٥٣٦

= ٠,٩٧٢٨



مثـــــال ٢

فى المثال السابق إذا كان إنتاج الفندق ٤٠٠ وحدة فأوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعـــاملي الالتــواء والتفرطــح لتوزيـــع الوحدات .

الحـــــل

المتوسط الحسابي لذى الحدين (التوقع μ) = ن ح

μ = ٤٠ × ٠,٢

= ٨٠ وحدة معيبة

الانحراف المعياري لتوزيع ذى الحدين (ع) = $\sqrt{\text{ن ح ل}}$

∴ ع = $\sqrt{٤٠٠ \times ٠,٢ \times ٠,٨}$

= ٨ وحدة معيبة

معامل التواء لتوزيع ذى الحدين = $\frac{\text{ل} - \text{ح}}{\text{ع}}$

= $\frac{٠,٨ - ٠,٢}{٨}$

= ٠,٠٧٥ ضعيف موجب



معامل التفرطح لتوزيع ذى الحدين $= ٣ + \frac{١ - ٦ ح ل}{ع}$

$= ٣ + \frac{١-٦×٠,٢×٠,٨}{٨}$

$= ٣ + ٠,٠٠٥$

$= ٣,٠٠٥$

التوزيع مدبب بدرجة طفيفة جدا

وبعد الانتهاء من هذا الباب (الباب الثانى) يجب الإشارة إلى أن غاية الإحصاء ليست دراسة العينة فى حد ذاتها أو التقدير فى حد ذاته ، وإنما غايته النهائية هي لاستنتاج الإحصائي لطبيعة توزيع الظاهرة فى المجتمع ومن ثم إمكان تعميم الحكم على المجتمع ككل .

الباب الثالـــث

اختـبارات الفــــروض

الباب الثالث

اختبـارات الفــروض

يعد هذا الباب هو أحد مجـــالى الاســتنتاج الاحصــائى وهمـــا التقديـــر واختبارات الفروض ويشتمل على

تمهيـــد :

الفصل الأول : اختبار المتوسطات (المقارنات)

أولا : اختبار متوسط عينة

ثانيا : اختبار متوسطى عينتين

ثالثا : اختبار عدة متوسطات عينات (تحليل التباين)

الفصل الثانى : اختبار التباينات (التجانس)

أولا : اختبار تبايني مجموعتين (تجانس مجموعتين).

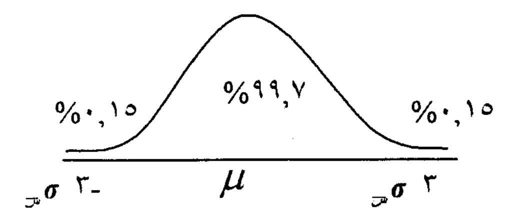
ثانيا : اختبار تباينـــات عـــدة مجموعـــات (تجـــانس المجموعات) .

الفصل الثالث : اختبار النسب .

الفصل الرابع : اختبار الفرق بيت التكرار الشاهد والتكرار المتوقع .

التمهيد :

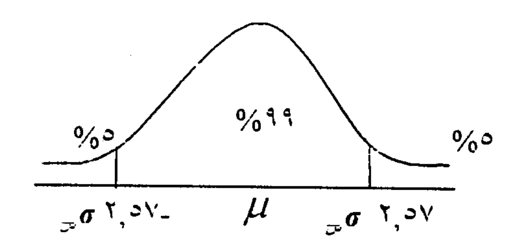
تسمى اختبارات الفـــروض باختبـــارات الفـــروق أو اختبـــارات المعنوية Test of Significance وهى اختبار فـــرض العـــدم Null Hupthteses أي عدم وجـــود فـــرق حقيقـــي (معنـــوي) بيـــن الواقـــع والمفترض، فإذا كنا بصدد مثلا اختبار الفرق بين متوسط المجتمـــع μ ومتوسط عينة مسحوبة منه $\bar{س}$ بهدف معرفة أن العينة تمثل المجتمـــع أم لا فإن فرض العدم هو أن $\mu = \bar{س}$ ي $\mu - \bar{س} =$ صفر بمعنى عدم وجود فرق بين μ ، $\bar{س}$ ومن ثم فالعينة تمثل المجتمع، ويسمى ذلـــك بالفرض الصحيح، أما إذا كان μ ؟ $\bar{س}$ أي $\mu - \bar{س} >$ صفر فإنه يوجد فرق ويسمى ذلك بالفرض غير الصحيح ، ويفيدنا توزيع متوســطات عينات المجتمع الذي يؤول إلى منحنى طبيعي معياري في إمكانية الحكـــم على حدود هذه الفروق فإذا كان $\bar{س}$ يقع :



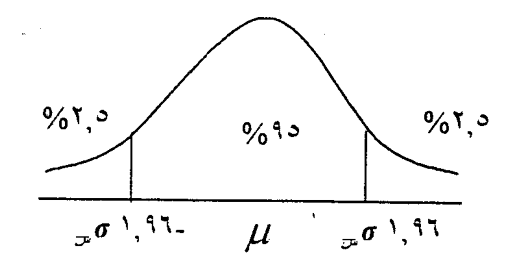


داخل حدود ± ٣ $\sigma_{\bar{س}}$ (أي ثلاث أخطار معيارية من متوسط المجتمـع) فإنه يمكن قبول س على أنها لا تفترق عن μ بدرجة ثقـة ٩٩,٧% وأن العينة تمثل المجتمع ، أما إذا كان س يقع خارج حـدود ±٣ $\sigma_{\bar{س}}$ فإنـه يمكن القول بأن العينة لا تنتمى لهذا المجتمع وتعد من العينات النادرة .

وهكذا إذا كان $\bar{س}$ يقع :



وهكذا إذا كان $\bar{س}$ يقع :



الفصل الأول

اختبار المتوسطات

أولا : اختبار متوسط العينة :

يجرى هذا الاختبار لمعرفة هل العينة تنتمي للمجتمع أم لا وذلــــك باختبار الفرق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع ، والمختبر الإحصـــائي المستخدم هو اختبار ى ، ت .

اختبار ى (Z) :

يستخدم اختبار ى فى حالة العينات الكبيرة الحجم (مفرداتها أكـــبر من ٣٠ مفردة) ذلك لأن كبر حجم العينة يجعل توزيع متوسطات عينـــات المجتمع يتبع التوزيع المعتدل حتى لو كان المجتمع الأصلى غير معتـدل ،

وبالطبع إذا كان المجتمع الأصلى معتدل فلا يشترط كبر حجم العينـــة ،

والمعادلة المستخدمة هي :

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\sigma_{\bar{س}}} = \frac{\bar{س} - \mu}{\left(\sqrt{\frac{\sigma}{ن}}\right)}$$

أو

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\left(\sqrt{\frac{ع}{ن}}\right)}$$ فى حالة عدم معلومية σ

وحيث $ع = \sqrt{\frac{مج (س - \bar{س})^{٢}}{ن - ١}}$ ويعرف بـــالانحراف المعيـــاري المعدل ويرجع السبب فى القسمة على (ن – ١) أن عـــــدم معلوميـــة σ تجعلنا نستبدلها بإيجاد ع من العينة ، وحتى لا يؤدى هذا الاســتبدال إلـــى التحيز لقيمة σ فإنه يتم القسمة على (ﻥ – ١) والذى يســمى بدرجـــات الحرية .

اختبار (ت) :

قام أحد العلماء فى عام ١٩٠٨ بدراسة توزيع متوسطات العينـــات الصغيرة الحجم (ﻥ < ٣٠) فوجد أن هذا التوزيـــع لا يتبـــع التوزيـــع



المعتدل بل يتبع توزيع آخر أكثر تشتتا أطلق عليـــه اسـم توزيـع (ت) بدرجات حرية مختلفة عند مستويات معنوية مختلفة (جدول توزيع ت) .

والمعادلة المستخدمة هي :

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{\left(\frac{ع}{\sqrt{ن}}\right)}$$ بدرجات حرية معينة عند مستويات معنوية معينة

أمثلـــه

مثـــــال ١

مجتمع إحصائي يتبع توزيع معتاد متوسطة (μ) = ٨٠ درجة بـــانحراف معياري ٧ درجات ، تم سحب عينة عشوائية حجمها ٢٥ مفردة متوســطها الحسابى ($\bar{س}$) = ٨٣ والمطلوب : هل العينة تمثل المجتمع أم لا وذلــك بدرجة ثقة ٩٥% .

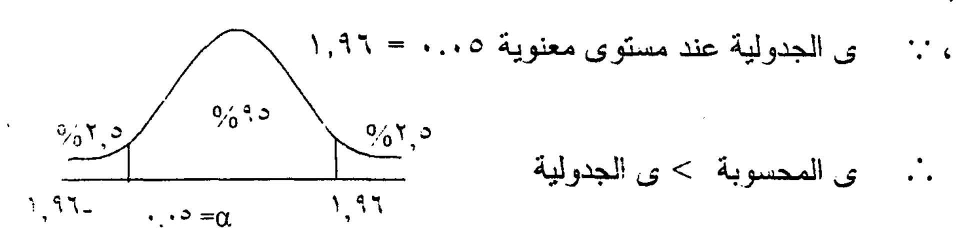
الحـــــل

$$\because \quad ى = \frac{(\bar{س} - \mu)\sqrt{ن}}{\sigma}$$

$$\therefore \quad ى = \frac{(٨٣ - ٨٠) \times \sqrt{٢٥}}{٧} = ٢,١٤$$



، ∵ ى الجدولية عند مستوى معنوية ٠.٠٥ = ١,٩٦



∴ ى المحسوبة > ى الجدولية

∴ الفرق معنوى أي حقيقي بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع .

∴ العينة لا تمثل المجتمع وهذا القرار بدرجة ثقة ٩٥%

ملحوظة :

إذا أردنا أن تقدر (μ) بفترة ثقة ٩٥% من العينة فى المثال السابق فإن

الحل كما يلى :

∵ $\mu = \bar{س} \pm$ ى $\sigma_{\bar{س}}$ عند مستوى المعنوية المطلوب

$= ٨٣ \pm ١,٩٦ \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ حيث $\alpha = ٠,٠٥$

$= ٨٣ \pm ١,٩٦ \times \frac{٧}{٥}$

$= ٨٣ \pm ٢,٧٤٤$

∴ $٨٥,٧٤٤ \geq \mu \geq ٨٠,٢٥٦$

∴ المجتمع الذى تمثله هذه العينة هو مجتمع متوسطه ينحصر بين حدين هما ٨٠,٣ ، ٨٥,٧ ، وهذا يؤكد أن هذه العينة لا تمثل المجتمع الذى متوسطه ٨٠ درجة .

مثـــال ٢

بأحد الفنادق آلة لإنتاج منتج ما ذو سمك ٠,٠٥ بوصة ، وللتأكد عما إذا كانت الآلة لازالت تعمل بهذه المواصفات تم سحب عينة عشوائية حجمها ١٠ وحدات من إنتاج هذه الآلة ووجد أن متوسط سمك الوحدة فى العينة = ٠,٠٥٣ بوصة بانحراف معياري ٠,٠٠٣ بوصة ، والمطلوب : اختبار مدى صلاحية الآلة للإنتاج بدرجة ثقة ٩٩% .

الحـــل

$$\because \quad ت = \frac{(\bar{س} - \mu)\sqrt{ن}}{ع}$$

$$= \frac{(٠,٠٥٣ - ٠,٠٥)\sqrt{١٠}}{٠,٠٠٣} = ٣,١٦٢$$

، ∵ ت الجدولية عند مستوى معنوية ١% ودرجات حرية ٩ = ± ٣,٢٥



∴ ت المحسوبة < ت الجدولية .

∴ الفرق غير معنوي أي غير حقيقي بين متوسط المجتمع ومتوسط العينة .

∴ الآلة ما زالت صالحة للإنتاج وهذا القرار بدرجة ثقه ٩٩% .

مثال ٣

تم إجراء امتحان لطلبة الفرقة الثانية في مادة الاحصاء وكانت نتيجة الامتحان لعينة عشوائية من هذا الامتحان هي ٦٠ ، ٤٠ ، ٣٠ ، ٧٠ ، ٥٠ ، ٩٠ ، ١٠ والمطلوب : هل يمكنك القول أن متوسط هذه العينة هو متوسط المجتمع الذى سحبت منه ؟

الحل

$$\because \bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$$

$$= \frac{٦٠+٤٠+ \dots +١٠}{٧} = \frac{٣٥٠}{٧} = ٥٠$$

$$، \because ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^{٢}}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٤٢٠٠}{٦}} = ٢٦,٤٦$$



$$\because \text{ت} = \frac{\bar{\text{س}}}{\left(\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}\right)} \text{ ،}$$

$$= \frac{٥٠}{\left(\frac{٢٦,٤٦}{\sqrt{٢,٦٥}}\right)} = ٥$$

، ∵ ت الجدولية عند مستوى معنوية ٥% ودرجـــات حريـــة ٦ تســـاوي ١,٩٤ .

∴ ت المحسوبة > ت الجدولية . .

∴ الفرق معنوى بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع ، وعليه فالعينـــة لا تمثل المجتمع أو أنها من العينات النادرة وهذا بدرجة ثقة ٩٥% .

مثـــال ٤

فى أحد المنتجعات السياحية يريد مكتب الصحة التـــأكد مـــن أن متوسط أعداد البكتريا فى الشاطئ لا يزيد عن حد الآمان وهو ٢٠٠ ، فتـم سحب عينة حجمها ١٠ أنابيب من ماء الشاطئ وبتقدير أعداد البكتريا بـــها وجـــــد ١٧٥ ، ١٩٠ ، ٢١٥ ، ١٩٨ ، ١٨٤ ، ٢٠٧ ، ٢١٠ ، ١٩٣ ،



١٩٦ ، ١٨٠ والمطلوب اختبر فرض أن μ = ٢٠٠ إذا علمت أن ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية ٩ تساوي ٢,٨٢ .

الحل

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{١٩٤٨}{١٠} = ١٩٤,٨$$

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^{٢}}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{١٥٥٣,٦}{٩}} = ١٣,٤$$

$$، \because ت = \frac{\bar{س} - \mu}{\left(\frac{ع}{\sqrt{ن}}\right)} = \frac{٥,٢}{\frac{١٣,١٤}{٤,١٥}} = ١,٢٥$$

، $\because$ ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية ٩ = ٢,٨٢ .

$\therefore$ ت المحسوبة < ت الجدولية بدرجة ثقة ٩٥% .

$\therefore$ الفرق غير معنوي وأن μ = ٢٠٠ أي أن ماء الشاطئ آمن

مثال ٥

تعاقد أحد موردى الدواجن مع أحد الفنادق على توريد كمية من الدجاج بحيث يكون وزن الدجاجة فى المتوسط (μ) = ١كجم ، وعند

التسليم قام مسئول الاستلام بالفندق بسحب عينة حجمها ١٦ دجاجة وتبين

أن $\overline{س}$ = ٠,٨ كجم ، ع = ٢.٠٦ جم فرفض الاستلام ، فهل هناك

مبرر لهذا الرفض علما بأن ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ،

درجات حرية ١٥ = ٢,١٣١ .

الحل

$$\because \quad ت = \frac{\overline{س}}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{٠,٨}{\frac{٢,٠٦}{٤}} = ١,٥٥$$

، ∵ ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية ١٥= ٢,١٣١

∴ ت المحسوبة < ت الجدولية ، وعلية فالفرق غير معنوى

∴ μ = ١ كجم ولا يوجد مبرر للرفض وذلك بدرجة ثقه ٩٥% .

مثال ٦

إذا كان متوسط الاقامة فى فنادق ج.م.ع هو ١٠٣ دولار فى

اليوم بانحراف معياري ٦ دولار ، وببحث تكلفة الاقامة فى عدد ٣٦ فندق

بمحافظة القاهرة تبين أن متوسط تكلفة الاقامة بها فى اليوم هو ١٢٤



دولار والمطلوب : هل يمكنك القول أن تكلفة الاقامة فى فنادق محافظة القاهرة تختلف اختلافا معنويا عن تكلفة الاقامة فى الفنادق على مستوى الجمهورية .

الحل

$$\because \; \text{ى} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\sigma / \sqrt{\text{ن}}} = \frac{\text{١٢٤} - \text{١٠٣}}{\text{٦} / \sqrt{\text{٣٦}}} = \text{٢١}$$

∵ ى الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٠٣(درجة ثقة ٩٩,٧%) تساوى٣

∴ ى المحسوبة > ى الجدولية ، وعليه فالفرق معنوي .

∴ يمكن القول أن تكلفة الاقامة فى فنادق محافظة القاهرة تختلف اختلافا معنويا عن متوسط تكلفة الاقامة فى الجمهورية بدرجة ثقه ٩٩,٧% .

مثال ٧

ماكينة مصممه لإنتاج نوع من المخبوزات متوسط قطره٥,٧٤ سم وانحراف معياري ٠,٠٨سم ، قامت إحدى الفنادق بشراء هذه الماكينة



والمطلوب :

١-صمم قاعدة لاتخاذ القرار تمكنك من التأكد بشكل معقول من أن مواصفات منتجات الماكينة تتفق مع المواصفات المطلوبة .

٢-وضح كيف يمكنك تمثيل قاعدة اتخاذ القرار بيانيا (خريطة المراقبة)

الحـــــل

-١

أولا : نقوم بأخذ عينة حجمها ٦ مفردات من نـــاتج مخبـــوزات الماكينـــة وتكرر الأخذ عدة مرات كل ساعتين مثلا ، ثم تحسب متوسط القطر فـــي العينة كل مرة .

ثانيا : تتبع الإجراء الإحصائي التالى :

$\because \quad \mu = \bar{س} \pm ٣ \, \sigma_{\bar{س}}$ بدرجة ثقه ٩٩,٧%

$\therefore \quad \mu = \bar{س} \pm ٣ \times \frac{٠,٠٨}{\sqrt{٦}}$

$\therefore \quad ٥,٧٤ = \bar{س} \pm ٠,١$

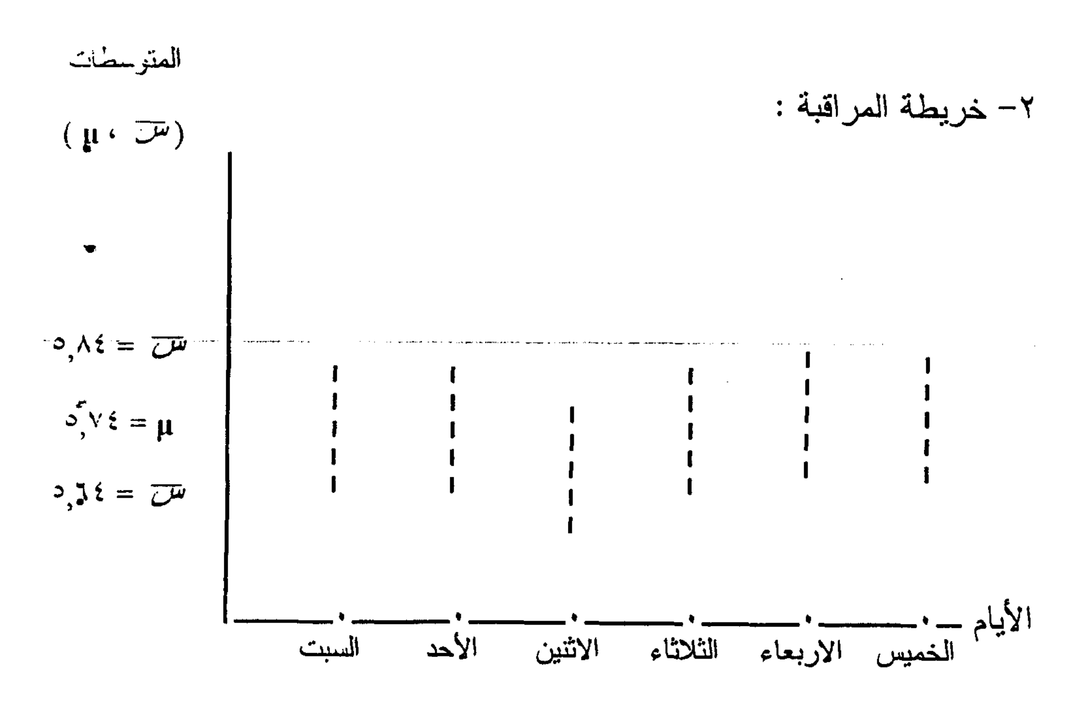
$\therefore$ $\bar{س}$ تتراوح بين ٥,٦٤ ، ٥,٨٤

ثالثا : قاعدة اتخاذ القرار :

أ - إذا كان متوسط القطر في العينة يقع داخل المدى (٥,٦٤ ، ٥,٨٤) فإن الماكينة تعمل حسب المواصفات .

ب- أما إذا كان متوسط القطر يقع خارج المدى (٥,٦٤ ، ٥,٨٤) فإن الماكينة لا تعمل حسب المواصفات ويتطلب الأمر البحث عن الأسباب .

٢- خريطة المراقبة :



* المحور الأفقي للأيام ، والمحور الرأسي للمتوسط



* يتم توقيع كل متوسط للعينة المأخوذة بنقطة كما موضح بالرسم

* وأنه مادامت النقط تقع بين الحدين ٥,٦٤ سم ، ٥,٨٤ سم فإن الماكينة تحت المراقبة ، أما إذا وقعت النقطة خارج حدود المراقبة مثل العينة الخامسة يوم الأحد ، والعينة الأولى يوم الاثنين فإن هناك خطأ ويتطلب الأمر استقصاء أسبابه .

* حدود المراقبة فى هذا المثال كانت ٩٩,٧% (ثلاث أخطاء معيارية) ، ألا أن حدود المراقبة ممكن أن تكون ٩٩% (٢,٥٧ خطأ معياري) أو ٩٥% (١,٩٦ خطأ معياري) .

ثانيا : اختبار متوسطى عينتين :

يجرى هذا الاختبار لمعرفة تبعية العينتين (المجموعتين) لمجتمع واحد أو المجتمعين مختلفين وذلك باختبار الفرق بين متوسطى العينتين ، ويجرى الاختبار باستخدام المعادلة :

$$ى = \frac{\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢}}{\sigma_{\bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢}}}$$

حيث $\sigma_{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}$ هو الخطأ المعياري للفرق بين متوسطى العينتين أو

المجموعتين ويساوى $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}$

أو ى = $\frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{ع_{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}}$

حيث $ع_{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}$ هو الخطأ المعياري للفرق بين متوسطى العينين

أو المجموعتين فى حالة عدم معلومية σ_1^2 ، σ_2^2 ويساوى $\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} \quad \frac{ع_2^2}{ن_2}}$

وذلك بشرط أن حجم العينة > ٣٠ .

أو ت = $\frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{ع \sqrt{\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}}}$ بدرجات حرية (ن١ + ن٢ - ٢)

وذلك إذا كان حجم العينة < ٣٠ ، وحيث :

$ع^2 = \frac{(ن_1 - 1) ع_1^2 + (ن_2 - 1) ع_2^2}{ن_1 + ن_2 - 2}$ ويسمى بالتباين التجميعى للعينتين

أمثـــــله

مثال ١ :

أراد مندوب المشتريات بأحد الفنـادق أن يشـترى نوعيـن مـن المصابيح الكهربية أ ، ب ، فقام بسحب عينة من كل نـوع بحجـم ١٠٠ لمبة ، وتبين أن متوسط عمر اللمبة حتـى الاحـتراق مـن النـوع أ أي $\bar{س}_1$ = ١١٦٠ ساعة ، ومن النـوع ب أي $\bar{س}_2$ = ١١٤٠ ساعة ، فإذا كان معلوما σ_1^2 أن للنـوع أ (المجتمـع الأول) = ٨١٠٠ ساعة ، σ_2^2 = ٦٤٠٠ ساعة .

والمطلوب : هل هناك شك فى أن النوعين لا يختلفان وذلك عند مسـتوي معنوية ٥% ؟

الحـــل

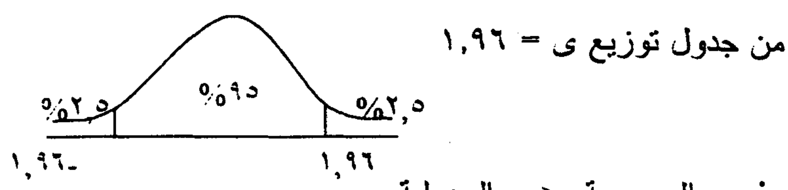
$$\because \quad ى = \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}}$$

$$= \frac{١١٦٠ - ١١٤٠}{\sqrt{\frac{٨١٠٠}{١٠٠} \quad \frac{٦٤٠٠}{١٠٠}}} = \frac{٢٠}{١٢} = ١,٦٧$$



، ∵ ى الجدولية عند مستوى معنوية ٥% هى من منحنى توزيـــع ى أو

من جدول توزيع ى = ١,٩٦



∴ ى المحسوبة < ى الجدولية .

∴ الفرق بين المتوسطين فرق غير معنوى أى فرق غير حقيقي .

العينتين متشابهتين أي نوعى اللمبات لا يختلفان وهذا القرار بدرجة ثقـــة

٩٥% أي بدرجة مخاطرة ٥% .

مثال ٢ :

لقياس القدرة اللغوية لدى طلبة السياحة والفنادق وطلبة اللغـــات ،

أجرى اختبار على عينتين من هذين المجتمعين ، وكانت نتيجة الاختبـــار

كما يلى :

	طلبة السياحة والفنادق	طلبة اللغات
حجم العينة (ن)	١١٥	١٧٥
متوسط درجة التحصيل فى العينة ($\bar{س}$)	١٩,٥	٢١
الانحراف المعياري فى العينة (ع)	٦	٥



والمطلوب : هل يمكنك الاستدلال (الاسترشاد) من هذه البيانات على أن هناك فرق حقيقي في القدرة اللغوية بين مجتمعي الطلبة محل الدراسة .

الحـــــل

∴ ى (لمتغير فرق) $= \dfrac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\dfrac{ع_1^2}{ن_1} + \dfrac{ع_2^2}{ن_2}}}$

$= \dfrac{١٩,٥ - ٢١}{\sqrt{\dfrac{٣٦}{١١٥} + \dfrac{٢٥}{١٧٥}}} = \dfrac{١,٥}{٠,٦٧٨} = ٢,٢١$

، ∴ ى الجدولية عند مستوى معنوية ٥% هي من منحنى توزيـــع ى أو من جدول ى = ١,٩٦ .

∴ ى المحسوبة > ى الجدولية .

∴ يوجد اختلاف أي هناك فرق حقيقي بين المجتمعين في القدرة اللغويـــة وهذا القرار صحيح بدرجة ٩٥% أي باحتمال خطأ ٥% .

ملحوظة :

يبدو بمجرد النظر أن الفرق ١,٥ درجة تحصيل بيـــن متوســـطي



العينتين هو فرق طفيف ، إلا أنه بتحويله إلى فرق معيـــاري ومقارنتـــه بالتوزيع المعتدل المعياري يعنى أنه فرق حقيقي بين المجتمعين .

مثال ٣ :

أجرى اختبار للذكاء على عينتين ، الأولي من طلبة السياحة بعـدد ١٦ طالب ، الثانية من طلبة الفنادق بعدد ١٤ طالب ، وكانت النتائج كمـــا يلى : –

العينة الأولى : $ن_١$ = ١٦ ، $\overline{س}_١$ = ١٠٧ ، $ع_١$ = ١٠

العينة الثانية : $ن_٢$ = ١٤ ، $\overline{س}_٢$ = ١١٢ ، $ع_٢$ = ٨

والمطلوب : اختبر عند مستوى معنوية α = ٠,٠٥ عما إذا كان يوجـــد فرق حقيقي بين مستوي الذكاء للمجتمعين محل الدراسة .

وذلك بفرض أن التوزيعين معتدلين ، وأن σ^2 واحدة فى المجتمعين .

الحـــــل

$$∵ ت = \frac{\overline{س}_١ - \overline{س}_٢}{ع \sqrt{\frac{١}{ن_١} \frac{١}{ن_٢}}}$$ طبقا للفروض الموضوعة



، ∵ $ع^٢ = \frac{(ن_١ - ١) ع^٢_١ + (ن_٢ - ١) ع^٢_٢}{ن_١ + ن_٢ - ٢}$

$= \frac{١٥ \times ١٠٠ + ١٣ \times ٦٤}{٢٨} = ٨٣,٢٨٥$

∴ ع = ٩,١٣

∴ت = $\frac{١٠٧ - ١١٢}{٩,١٣ \sqrt{\frac{١}{١٦} + \frac{١}{١٤}}} = ١,٤٩٦$

، ∵ ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية ٢٨ من جدول ت = ٢,٠٤٨ .

∴ ت المحسوبة < ت الجدولية

∴ الفرق غير معنوي أي غير حقيقي بين العينتين أي أن مستوى الذكاء واحد بين مجتمعى الطلبة محل الدراسة وهذا القرار صحيح بدرجة ٩٥% ، أي باحتمال خطأ ٥% .

مثال ٤ :

لمقارنة إنفاق مجموعتين من السائحين ثم أخذ عينه عشوائية حجمها ١٠ مفردات من كل مجموعة و كان إنفاق كل سائح في



المجموعتين كما يلى :

انفاق سائح المجموعة الاولى (س١)	٤٧	٣٨	٤٤	٤٨	٥٢	٤٤	٥٢	٦٠	٤٤	٥٥
انفاق سائح المجموعة الثانية (س٢)	٤٠	٣٩	٣٢	٣٣	٤٠	٢٧	٣٦	٥٦	٥٠	٤٠

والمطلوب : اختبر أن $\mu_1 = \mu_2$

الحـــــل

١) الجدول الإحصائي اللازم :

س١	س١²	س٢	س٢²
٤٧	٢٢٠٩	٤٠	١٦٠٠
٣٨	١٤٤٤	٣٩	١٥٢١
٤٤	١٩٣٦	٣٢	١٠٢٤
٤٨	٢٣٠٤	٣٣	١٠٨٩
٥٢	٢٧٠٤	٤٠	١٦٠٠
٤٤	١٩٣٦	٢٧	٧٢٦
٥٢	٢٧٠٤	٣٦	١٢٩٦
٦٠	٣٦٠٠	٥٦	٣١٣٦
٤٤	١٩٣٦	٥٠	٢٥٠٠
٥٥	٣٠٢٥	٤٠	١٦٠٠
٤٨٤	٢٣٧٩٨	٣٩٣	١٦٠٩٥

$$\bar{س}_1 = \frac{مجـ س_1}{ن_1} = \frac{٤٨٤}{١٠} = ٤٨,٤ \text{ دولار}$$

$$\bar{س}_2 = \frac{مجـ س_2}{ن_1} = \frac{٣٩٣}{١٠} = ٣٩,٣ \text{ دولار}$$

$$ع^2_1 = \frac{مجـ س^2_1}{ن_1} - \left(\frac{مجـ س_1}{ن_1}\right)^2$$

$$= \frac{٢٣٧٩٨}{١٠} - \left(\frac{٤٨٤}{١٠}\right)^2$$

$$= ٢٣٧٩,٨ - ٢٣٤٢,٥٦ = ٣٧,٢٤$$

$$ع^2_2 = \frac{مجـ س^2_2}{ن_2} - \left(\frac{مجـ س_2}{ن_2}\right)^2$$

$$= \frac{١٦٠٩٣}{١٠} - \left(\frac{٣٩٣}{١٠}\right)^2$$

$$= ١٦٠٩,٣ - ١٥٤٤,٤٩ = ٦٤,٨١$$

٢) $\because ع^2_{تجميعى} = \frac{(ن_1 - ١)\, ع^2_1 + (ن_2 - ١)\, ع^2_2}{ن_1 + ن_2 - ٢}$

$$= \frac{٩ \times ٣٧,٢٤ + ٩ \times ٦٤,٨١}{١٨} = ٥١,٢٥$$

$$\therefore ع_{تجميعى} = \sqrt{٥١,٢٥} = ٧,١٥٩$$

٣) ت $= \dfrac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{ع_{تجميعي}\sqrt{\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}}}$

$= \dfrac{48.4 - 39.3}{7.159\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = \dfrac{9.1}{3.2} = 2.843$

٤) ∵ت الجدولية عن مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية ١٨=٢,١٠١

∴ت المحسوبة > ت الجدولية ، وعلية فالفرق معنوى .

∴ $\mu_1 \neq \mu_2$ أي يوجد فرق حقيقي بين متوسط إنفاق المجموعتين

وإذا كانت العينتين غير مستقلتين (يتبعان مفردة واحدة) :

$$ى = \dfrac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2} - ر\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} \times \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}}}$$

ويستخدم فى حالة عدم توافر قراءات مفردات العينتين وإنما يتوفر عنـــهما

$\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_2$ ، σ_1^2 ، σ_2^2

أو ت $= \dfrac{\bar{س}_ف}{\sqrt{\frac{ع_ف^2}{ن}}}$



حيث : ف : هى الفرق بين كل زوج من القرارات لكل مفردة .

$\bar{س}$ ف : هي متوسط الفرق وتساوى $\frac{مجـ ف}{ن}$

$ع^{٢}$ ف : هي تباين الفرق .

- ويستخدم هذا الاختبار فى حالة توافر البيانات الأصلية لزوج كل مفردة ويسمى هذا الاختبار باختبار ت لمقارنة الأزواج .

مثـــــال ١

عند دراسة تأثير دواء معين على ضغط الدم المرتفع تم أخذ عينـة من ١٠ أشخاص مصابون بهذا المرض ، وتم قراءة ضغط الدم لكل منـهم قبل وبعد تعاطى الدواء محل الدراسة وكانت النتائج كالتالى :

المفردات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
قبل تعاطى الدواء	١٧٠	١٨٠	١٦٠	١٧٥	١٥٠	١٨٠	١٨٥	١٩٠	١٩٥	٢٠٠
بعد تعاطى الدواء	١٦٠	١٦٠	١٥٥	١٧٠	١٤٠	١٦٥	١٧٠	١٧٥	١٨٠	١٨٠

والمطلوب : اختبر هل للدواء تأثير أم لا .



الحـــل

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

المفردات	قبل	بعد	الفرق (ف)	ف٢
١	١٧٠	١٦٠	١٠	١٠٠
٢	١٨٠	١٦٠	٢٠	٤٠٠
٣	١٦٠	١٥٥	٥	٢٥
٤	١٧٥	١٧٠	٥	٢٥
٥	١٥٠	١٤٠	١٠	١٠٠
٦	١٨٠	١٦٥	١٥	٢٢٥
٧	١٨٥	١٧٠	١٥	٢٢٥
٨	١٩٠	١٧٥	١٥	٢٢٥
٩	١٩٥	١٨٠	١٥	٢٢٥
١٠	٢٠٠	١٨٠	٢٠	٤٠٠
المجموع			١٣٠	١٩٥٠

$$\because \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \quad \text{أو} \quad \bar{\text{س}}_{\text{ف}} = \frac{\text{مجـ ف}}{\text{ن}} = \frac{١٣٠}{١٠} = ١٣$$

$$، \because \text{ع}^2 = \frac{١}{\text{ن} - ١}\left(\text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}\right) \quad \text{أو} \quad \text{ع}^2_{\text{ف}} = \frac{١}{\text{ن} - ١}\left(\text{مجـ ف}^2 - \frac{(\text{مجـ ف})^2}{\text{ن}}\right)$$

$$\therefore \text{ع}^2_{\text{ف}} = \frac{١}{١٠ - ١} \cdot \left(١٩٥٠ - \frac{(١٣٠)^2}{١٠}\right) = ٢٨,٩$$

$$، \because \text{ت} = \frac{\bar{\text{س}}_{\text{ف}}}{\sqrt{\frac{\text{ع}^2_{\text{ف}}}{\text{ن}}}} \qquad \therefore \text{ت} = \frac{١٣}{\sqrt{\frac{٢٨,٩}{١٠}}} = ٧.٧$$



، ∵ ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية ٩=٢,٢٦٢.

∴ ت المحسوبة > ت الجدولية ∴ الفرق معنوي

التفسير : أن للدواء تأثير على هذا المرض .

مثـــال ٢

الجدول التالى يوضح السياحة الوافدة من الدول العربية فى عامى ١٩٩٤ ، ١٩٩٥ .

الدولة	عدد السائحين عام ١٩٩٥ س١	عدد السائحين عام ١٩٩٤ س٢
الجزائر	٢٠١١	١٩٨٤
البحرين	١٧٨٥	١٨٨٠
العراق	٥١٢	٣٨٦
الأردن	١١٣٨٧	٩٧٨٣
الكويت	١٢٤١٢	١٣٨٢٢
لبنان	٤٤٦٩	٣٩٣٨
ليبيا	٣٤٤٢٩	٣٢٥٦٦
المغرب	٦٣٨٧	٥٨٨٢
عمان	١٠٦٤	٩١٤
فلسطين	١٢٧٥٦	١٩٢٩٩
قطر	١٧٣٣	١٧٠٦
السعودية	٤٠٩٥٣	٣٧٨١٩
السودان	١٢٠٧١	١٦٠٥٨
سوريا	١٦٧٨٠	١٤٧٧٤
تونس	٥٠٩٢	٣٥١٨
الأمارات	٢٨٩٦	٢٢٩٦

والمطلوب : اختبر هل يوجد فرق بين الحركة السياحية هذه لعامى ١٩٩٤ ، ١٩٩٥ .



الحـــــل

تكوين الجدول الإحصائى اللازم :

المفردات	١٩٩٥	١٩٩٤	الفرق (ف)	ف^{٢}
الجزائر	٢٠١١	١٩٨٤	٢٧	٧٢٩
البحرين	١٧٥٨	١٨٨٠	١٢٢-	١٤٨٨٤
العراق	٥١٢	٣٨٦	١٢٦	١٥٨٧٦
الأردن	١١٣٨٧	٩٧٨٣	١٦٠٤	
الكويت	١٢٤١٢	١٣٨٢٢	١٤١٠-	
لبنان	٤٤٦٩	٣٩٣٨	٥٣١	
ليبيا	٣٤٤٢٩	٣٢٥٦٦	١٨٦٣	
المغرب	٦٣٨٧	٥٨٨٢	٥٠٥	
عمان	١٠٦٤	٩١٤	١٥٠	
فلسطين	١٢٧٥٦	١٩٢٩٩	٦٥٤٣-	
قطر	١٧٣٣	١٧٠٦	٢٧	
السعودية	٤٠٩٥٣	٣٧٨١٩	٣١٣٤	
السودان	١٢٠٧١	١٦٠٥٨	٣٩٨٧-	
سوريا	١٦٧٨٠	١٤٧٧٤	٢٠٠٦	٤٠٢٤٠٣٦
تونس	٥٠٩٢	٣٥١٨	١٥٧٤	٢٤٧٧٤٧٦
الأمارات	٢٨٩٦	٢٢٩٦	٦٠٠	٣٦٠٠٠٠
المجموع	١٦٦٧١٠	١٦٦٦٢٥	٨٥	٨٤٠١٣٨٩٥

$$\because \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \qquad \bar{\text{س}}_{\text{ف}} = \frac{\text{مجـ ف}}{\text{ن}} = \frac{\text{٨٥}}{\text{١٦}} = \text{٥,٣١٢٥}$$

$$\text{،} \because \text{ع}^{2} = \frac{1}{\text{ن} - 1} \left(\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}} \right)$$

$$\therefore \text{ع}^{2}_{\text{ف}} = \frac{1}{\text{ن} - 1} \left(\text{مجـ ف}^{2} - \frac{(\text{مجـ ف})^{2}}{\text{ن}} \right)$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{١٦}} \left(\text{٨٤٠٠٨٠١٦} - \frac{(\text{٨٥})^{2}}{\text{١٦}} \right)$$

$$= \text{٥٦٠٠٨٩٦,٢٢٩}$$

$$\text{، ت} = \frac{\bar{\text{س}}_{\text{ف}}}{\sqrt{\frac{\text{ع}^{2}_{\text{ف}}}{\text{ن}}}} = \frac{\text{٥,٣١٢٥}}{\sqrt{\frac{\text{٥٦٠٠٨٩٦,٢}}{\text{١٦}}}} = \frac{\text{٥,٣١٢٥}}{\text{٥٩١,٦٥٥}} = \text{٠,٠٠٨٩٨}$$

، ∵ ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية ١٥= ٢,٣١

∴ ت المحسوبة < ت الجدولية وعليه فافرق غير معنوي .

∴ نقبل الفرق وهو لا يوجد فرق فى الحركة الســـــياحية بيــن عـــامى ١٩٩٤ ، ١٩٩٥ .



مثـــــال ٣

الجدول التالي يبين عدد الليالي السياحية بالدرجات الفندقيـــة خـــلال شهري يناير ويونيو عام ١٩٩٢ ، والمطلوب مقارنة الإقامـــة فـــى الدرجات الفندقية خلال الشهرين .

الدرجة الفندقية / الشهرين	٥ نجوم	٤نجوم	٣نجوم	٢نجمه	نجمه	تحت التقييم
يناير	٤٢٥	١٨٧	٢٣٦	٩٩	٤٨	٣٤٩
يونيو	٣٦٦	١٥٥	٢٠٨	٧٥	٣٦	٣٤٣

الحـــل

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

الدرجة الفندقية	يونيو	يناير	الفرق (ف)	ف^{٢}
٥ نجوم	٣٦٦	٤٢٥	٥٩-	٣٤٨١
٤ نجوم	١٥٥	١٨٧	٣٢-	١٠٢٤
٣ نجوم	٢٠٨	٢٣٦	٢٨-	٦٨٤
٢ نجمه	٧٥	٩٩	٤٢-	٥٧٦
نجمه	٣٦	٤٨	١٢-	١٤٤
تحت التقيم	٣٤٣	٣٤٩	٦-	٣٦
المجموع	١١٨٣	١٣٧١	١٨٨	٨٢٨٦

$$\because \overline{س}_{ف} = \frac{مجـ ف}{ن} = \frac{٨٥}{١٦} = ٣١,٣٣$$

$$، \because ع^{٢}_{ف} = \frac{١}{ن - ١}\left(مجـ ف^{٢} - \frac{(مجـ ف)^{٢}}{ن}\right)$$

$$= \frac{١}{٥}\left(٨٢٨٦ - \frac{(١٨٨)^{٢}}{١٦}\right)$$

$$= ٤٧٩,٠٦٦٦$$

$$، \because ت = \frac{\overline{س}_{ف}}{\sqrt{\frac{ع^{٢}_{ف}}{ن}}} = \frac{٣١,٣٣}{\sqrt{\frac{٤٧٩,٠٦٦٦}{٦}}} = \frac{٣١,٣٣}{٨,٩٣٥٦} = ٣,٥٠٦$$

، ∵ ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية تساوى٢,٥٧١

∴ ت المحسوبة > ت الجدولية وعلية فالفرق معنوي .

∴ لا تقبل فرض العدم وتقبل الفرض البديل وهو وجود فـــرق حقيقـــي بين مدة الإقامة فى الشهرين وذلك بدرجة ثقة ٩٥% .



ثالثا : اختبار عدة متوسطات عينات : (تحليل التباين)

تمهيد :

من المعلـــوم أن اختبـــار ى (Z) يقتصـــر علـــى مقارنـــة المجموعتين اللتين يكون كلا من σ ، μ لمجتمعيها معلومتين لـــدى الباحث وهو الأمر الذي لا يتوافر فى جميع الأحوال . كما أن اختبار ت (T) لا يكون عمليا فى المقارنة بين عدة مجموعات حيث لابـــد مـــن حساب عدة قيم لـــ ت حتى يمكن مقارنة اثنين كل مره وهو أمـــر غـــير عملى ، فمثلا إذا كنـــا نريـــد مقارنـــة ٣ مجموعـــات أي ٣ متوســـطات مجموعات باستخدام اختبار ت فإننا سنجرى ٣ مقارنات ، وإذا كنا أمـــلم ٥ مجموعات فســـنجرى ١٠ مقارنـــات (١٠ق٢ = ١٠) ، وإذا كنـــا أمـــام ١٠مجموعات فسنجرى ٤٥ مقارنة (١٠ق٢ = ٤٥) ويعتبر هـــذا الأمـــر مجهد جدا . وأنه للتغلب على هذه الصعوبات تمكن العـــالم فيشـــر عـــام ١٩٢٥ من إيجاد طريقة إحصائية تمكن من إجراءات المقارنة بين عـــدة متوسطات فى آن واحد تعرف بطريقة تحليـــل التبـــاين Analgsis of Variance واختصار ANOVA ثم إجراء اختبـــار المعنويـــة لنتـــائج



التحليل باستخدام المختبر الإحصائي F نسبة إلى العالم فيشر ، ويجـــرى التحليل والاختبار كما فى المثال الإيضاحي التالي :

لإجراء المقارنة بين طلاب أقسام السياحة والارشاد والفنادق فـــى امتحان اللغة الانجليزية ثم أخذ عينة عشوائية من كل قسم حجمها ٥ أفـراد وكانت درجاتهم كالتالى :

طلبة السياحة	طلبة الفنادق	طلبة الارشاد
١	٦	٣
٢	١٢	٧
٦	١٤	٧
٤	٨	٦
٧	٥	٢

خطوات تحليل التباين واستخدام اختبار ف لإجراء المقارنة :

١) حساب التباين الكلى باعتيار جميع مفردات المجموعـــات كمجموعـــة واحدة :

$$\therefore ع^2 = \frac{مج\,(س - \overline{\overline{س}})^2}{ن - ١}$$

$$\therefore ع^2 \text{ للمثال } = \frac{١٤٨}{١٤} \quad (١)$$

---

(١) $\overline{س}$ للسياحة = ٤ ، $\overline{س}$ للفنادق = ٩ ، $\overline{س}$ للارشاد = ٥ ، $\overline{\overline{س}}$ = ٦ .

٢) تحليل التباين الكلى إلى مكوناته :

أ- التباين داخل المجموعات :

وهو مجموع التباين داخل المجموعات على أساس أن تباين كل مجموعة هو متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابى .

∴ التباين داخل المجموعات = $ع_{١}^{٢} + ع_{٢}^{٢} + ع_{٣}^{٢}$

وللمثال $= \frac{٢٦}{٤} + \frac{٣٠}{٤} + \frac{٢٢}{٤} = \frac{٧٨}{١٢}$

ب- التباين بين المجموعات :

وهو متوسط مجموع مربعات انحرافات متوسطات المجموعات عن متوسطهم الحسابي أي $\frac{مجـ (\bar{س} - \bar{\bar{س}})^{٢}}{ن - ١}$ مرجحا بالأوزان أي بعدد مفردات كل مجموعة .

∴ $ع^{٢}$ بين المجموعات للمثال = $\frac{٥ (٤ - ٦)^{٢} + ٥ (٩ - ٦)^{٢} + ٥ (٥ - ٦)^{٢}}{٣ - ١}$



$$= \frac{٧٠}{٢}$$

ويتضح أن مجموع التباينين داخل المجموعات وبين المجموعات يساوى التباين الكلى أي $\frac{٧٨}{١٢} + \frac{٧٠}{٢} = \frac{١٤٨}{١٤}$ مع ملاحظة أن الجمع هنا جمع إحصائي وليس جمع حسابي .

٣) ف $= \frac{\text{التباين بين المجموعات}}{\text{التباين داخل المجموعات}}$

$$= \frac{٣٥}{٦,٥} = ٥,٤$$

٤) نقارن ف المحسوبة بـ ف الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية (٢ ، ١٢) والتى تساوى ٣,٩ من جدول توزيع ف[1].

∴ ف المحسوبة > ف الجدولية وعليه فالفرق معنوى .

∴ يوجد فرق حقيقي بين المجموعات الثلاثة أي أنهم ليسوا فى مستوى واحد وهذا القرار بدرجة ثقة ٩٥% .

ويمكن صياغة خطوات الحل السابقة فى جدول يسمي بجدول تحليل

[1] سيرد تباعا شرح جدول توزيع ف .



التباين كما يلى : Analgsis of Variance :

مصدر التباين S . V	درجات الحرية D . F	مجموع مربعات الانحرافات SS	متوسط مجموع مربعات الانحرافات MS	F
بين المجموعات BSS	٢	٧٠	٣٥	٣٥ / ٦.٥ = ٥,٤
داخل المجموعات WSS	١٢	٧٨	٦,٥	
الكلى TSS	١٤	١٤٨		

Source of Variation S . V .
Between Sums of Squars BSS .
Withen ,, ,, ,, WSS .
Degree of friadiam D.F .
SS .

مثـــــال ٢

فى تجربة ما تم المقارنة بين ٣ عينات بكل عينة ٥ مشـــاهدات ، والمطلوب عمل جدول تحليل التباين إذا علمــت أن مجمــوع المربعــات الكلية ٢٠٠ ، وأن التباين داخل المجموعات (الخطأ التجريبى) هــو ١٠ ، وأن F الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حريـــة (٢ ، ١٢) هو ٣,٩ .



الحــــــل

∵ عدد العينات ٣ وحجم كل عينة ٥

∴ العدد الكلى للمفردات = ١٥ مفردة

∴ درجات الحرية الكلية = ن – ١ = ١٥ – ١ = ١٤

، ∵ عدد العينات ٣

∴ درجات الحرية بين المجموعات = ن – ١ = ٣ – ١ = ٢

جدول تحليل التباين :

مصدر التباين	درجات الحرية	مجموع مربعات الانحرافات	متوسط مربعات الانحرافات	F
بين المجموعات	٢	٨٠	٤٠	$\frac{٤٠}{١٠} = ٤$
داخل المجموعات	١٢	١٢٠	١٠	
الكلى	١٤	٢٠٠		

∴ ف المحسوبة > ف الجدولية .

∴ الفروق بين المجموعات الثلاثة فروق معنوية (حقيقية) .



ونستنتج من ذلك أن المجموعات الثلاثة مختلفة عن بعضـــــها وأن

هذا القرار بدرجة ثقة ٩٥% .

مثـــــال ٣

لمقارنة الأجر الشهري للعمال فى ٣ شركات سياحية تم أخذ عينة من

عمال كل شركة وكانت أجورهم كما فى الجدول التالي :

المعاملات (الاجور) / المشاهدات (العمال)	الشركة الأولى	الشركة الثانية	الشركة الثالثة
العامل رقم ١	٧٨	٨٦	٨٦
العامل رقم ٢	٨٠	٩٠	٨٤
العامل رقم ٣	٨٦	٩٤	٨٢
العامل رقم ٤	٨٤		

والمطلوب : اختبر وجود فرق بين أجر العمال فى الشركات الثلاثة

الحـــــل

يتم هذا الاختبار باستخدام أسلوب تحليل التباين كما يلى :

١) حساب المتوسط لكل مجموعة :



$$\bar{س} \text{ للمجموعة الأولى} = \frac{٨٤+٨٦+٨٠+٧٨}{٤} = ٨٢$$

$$\bar{س} \text{ للمجموعة الثانية} = \frac{٩٤+٩٠+٨٦}{٣} = ٩٠$$

$$\bar{س} \text{ للمجموعة الثالثة} = \frac{٨٢+٨٤+٨٦}{٣} = ٨٤$$

٢) حساب المتوسط العام:

$$\bar{\bar{س}} = \frac{٨٢+٨٤+٨٦+٩٤+٩٠+٨٦+٨٤+٨٦+٨٠+٧٨}{١٠} = ٨٥$$

$$\text{أو } \bar{\bar{س}} = \frac{٣\times٨٤ + ٣\times٩٠ + ٤\times٧٢}{٣+٣+٤} = ٨٥$$

٣) حساب التباين داخل كل مجموعة :

$$ع^٢ \text{ للمجموعة الأولى} = \frac{(٨٢-٧٨)^٢+(٨٢-٨٠)^٢+(٨٢-٨٦)^٢+(٨٢-٨٤)^٢}{٣} = \frac{٤٠}{٣}$$

$$ع^٢ \text{ للمجموعة الثانية} = \frac{(٩٠-٨٦)^٢+(٩٠-٩٠)^٢+(٩٠-٩٤)^٢}{٢} = \frac{٣٢}{٢}$$

$$ع^٢ \text{ للمجموعة الثالثة} = \frac{(٨٤-٨٦)^٢+(٨٤-٨٤)^٢+(٨٤-٨٢)^٢}{٢} = \frac{٨}{٧}$$

$$\therefore \text{التباين التجميعى للتباينات داخل المجموعات} = \frac{٤٠}{٣} + \frac{٣٢}{٢} + \frac{٨}{٢} = \frac{٨٠}{٧}$$

مع ملاحظة أن الجمع هنا جمع إحصائي وليس جمع حسابي .



٤) التباين بين المجموعات :

ع² بين المتوسطات والمتوسط العام =

$$= \frac{٤(٨٢-٨٥)^{٢} + ٣(٩٠-٢٥)^{٢} + ٣(٨٤-٨٥)^{٢}}{٢} = \frac{١١٤}{٢}$$

٥) التباين الكلى :

$$\because ع^{٢} = \frac{(س - \bar{س})^{٢}}{ن - ١}$$

$$ع^{٢} = \frac{١}{٩} \Big[(٧٨-٨٥)^{٢} + (٨٠-٨٥)^{٢} + (٨٦-٨٥)^{٢} + (٨٤-٨٥)^{٢}$$

$$+ (٨٦-٨٥)^{٢} + (٩٠-٨٥)^{٢} + (٩٤-٨٥)^{٢} + (٨٦-٨٥)^{٢}$$

$$+ (٨٤-٨٥)^{٢} + (٨٢-٨٥)^{٢} \Big]$$

$$= \frac{١}{٩} \quad (١٩٤)$$

$$= \frac{١٩٤}{٩}$$



ويلاحظ أن :

التباين الكلى = التباين داخل المجموعات + التباين بين المجموعات

$$\frac{١٩٤}{٩} = \frac{٨٠}{٢} + \frac{١١٤}{٧}$$

٦) جدول تحليل التباين : ANOVA

مصدر البيانات	درجات الحرية	مجموع مربعات	متوسط مجموع مربعات	F
بين المجموعات	٢	١١٤	٥٧	٥ = ٥٧ / ١١.٤ وتسمى F المحسوبة
داخل المجموعات	٧	٨٠	١١,٤ *	
الكلى	٩	١٩٤		

٧) ∵ F الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية (٢ ، ٧) هى ٤,٧٤ .

∴ F المحسوبة > F الجدولية وعليه فالفرق معنوى .

∴ نرفض فرض العدم وهو أن $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ونقبل الفرض

* هو التباين داخل المجموعات ويسمى بالخطأ التجريبي .



البديل وهو أن $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ ، أي يوجد فرق بين البيانات المعطاة ، أي يوجد فرق بين الأجور فى الشركات الثلاثة .

مثال ٤

لمقارنة الانفاق السياحي فى مصر وفقا للأسواق السياحية المصدرة للسياحة فى العالم تم اختبار ٤ سائحين اختبارا عشوائيا من كل من هذه الأسواق وكانت النتائج المتحصل عليها كالتالى :

المعاملات (انفاق السائح) / المشاهدات (نوع السائح)		انفاق السائح فى اليوم			
		١	٢	٣	٤
أوربا	أ	٥٥	٤٥	٦٠	٥٠
أمريكا	ب	٤٠	٤٥	٥٥	٣٥
أسيا	جـ	٤٥	٤٠	٣٥	٤٠
افريقيا	ع	٣٠	٤٠	٤٥	٤٥
استراليا	هـ	٣٠	٣٥	٢٥	٤٠

المطلوب : اختبر هل يوجد فرق معنوي بين أنواع السائحين الخمسة فى الإنفاق السياحي .



الحـــــل

ملاحظات :

١-يلاحظ أننا أمام ٥ عينات بكل عينة ٤ مفردات ، ولاجــراء المقارنــة يستلزم اجرائها بين عدة متوسطات عينات أي متوســـطات العينـــات الخمسة وهنا يتم استخدام جدول تحليل التباين والمختبر الإحصائي F.

٢-أنه بدلا من استخدام طريقة الفروق كما فى الأمثلـــة الســـابقة ســيتم استخدام القيم الأصلية مباشرة مع تطبيق القوانين المناسبة[1] وهى :

(١) المجموع الكلى للمربعات SST = مجـ س^2 − $\frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ت ر}}$

حيث : ت هى عدد المشاهدات ، ر هى عدد المعاملات

(٢) مجموع المربعات داخل المجموعات SSB = مجـ $\frac{(\text{مجـ ت})^2}{\text{ر}}$ − $\frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ت ر}}$

(٣) مجموع المربعات بين المجموعات SSW = مجـ س^2 − مجـ $\frac{(\text{مجـ ت})^2}{\text{ر}}$

ونتابع حل المثال كما يلى :

- لكل من القوانين الثلاثة إثباتها الرياضي القائم على أن مجموع المربعات = مجـ (س − $\bar{\text{س}}$)^2



أولا : $$SST = \text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}$$

$$= (\text{٣٠}^{2} + \cdots + \text{٥٠}^{2}) - \frac{(\text{٣٠} + \cdots + \text{٥٠})^{2}}{\text{٥} \times \text{٤}}$$

$$= \text{٣٦٣٧٥} - \text{٣٤٨٦١,٢٥} = \underline{\text{١٥١٣,٧٥}}$$

$$SSB = \text{مجـ} \frac{(\text{مجـ ت})^{2}}{\text{ر}} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}$$

$$= \text{مجـ} \left(\frac{(\text{٥٥} + \text{٤٥} + \text{٦٠} + \text{٥٠})^{2} + \cdots + (\text{٣٠} + \text{٣٥} + \text{٢٥} + \text{٤٠})^{2}}{\text{٤}} \right)$$

$$- \text{٣٤٨٦١,٢٥}$$

$$= \frac{\text{١٤٢٨٢٥}}{\text{٤}} - \text{٣٤٨٦١,٢٥}$$

$$= \text{٣٥٧٠٦,٢٥} - \text{٣٤٨٦١,٢٥} = \underline{\text{٨٤٥}}$$

$$SSW = \text{مجـ س}^{2} - \text{مجـ} \frac{(\text{مجـ ت})^{2}}{\text{ر}}$$

$$= \text{٣٦٣٧٥} - \text{٣٥٧٠٦,٢٥} = \underline{\text{٦٦٨,٧٥}}$$



ثانيا : جدول تحليل التباين :

مصدر البيانات	درجات الحرية	مجموع مربعات	متوسط مجموع مربعات	F
بين المجموعات	٤	٨٤٥	٢١١,٢٥	$\frac{٢١١,٢٥}{٤٤,٥٨} = ٤,٧٤$ وتسمى F المحسوبة
داخل المجموعات	١٥	٦٦٨,٧٥	٤٤,٥٨ *	
الكلى	١٩			

∵ F الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية (٤ ، ١٥) هـــى ٣,٠٦ .

∴ F المحسوبة > F الجدولية وعليه فالفرق معنوي .

∴ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل أي أن

$$\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 \neq \mu_5$$

أي أن الاختلافات بين المتوسطات الخمسة أكبر من الاختلافات العشـوائية ، أي أن الفرق حقيقي ولم ينتج عن الصدفة ، وهذا القرار على صـــــواب فى ٩٥% من الحالات .

* هو التباين داخل المجموعات ويسمى بالخطأ التجريبي .



ثالثا : مقارنة الأنواع ببعضها :

أن ما تم التوصل إليه من جدول تحليل التباين هو بيـــان بوجــود فرق معنوي بين الأنواع الخمسة ، لكن لم يتضح لنا هل الفروق بين كـــل المتوسطات الخمسة ببعضها فروق معنوية أم أن بعــــض تلــك الفــروق معنوي والبعض الآخر غير معنوي ، ولبيان ذلك يتم المقارنة بيـــن كـــل متوسطين أي مثنى مثنى واستخدام أسلوب أقل فرق معنـــوى L.S.D أي Lest Significance Difference وهو :

L.S.D = ت الجدولية عند مستوى معنوية α ودرجات الحرية المقابلـــة للخطأ التجريبى × $\sqrt{\frac{\text{٢ الخطأ التجريبى}}{ر}}$

حيث : $\sqrt{\frac{\text{٢ الخطأ التجريبى (التباين داخل المجموعات)}}{ر}}$ يشبه $\sqrt{\frac{ع^{٢}}{ن}}$ أو $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$

وأنه فى حالة اختلاف ر من عينة لأخرى فإن $\sqrt{\frac{\text{٢ الخطأ التجريبى}}{ر}}$

يصبح $\sqrt{\text{الخطأ التجريبى} \left(\frac{١}{ر_{١}} + \frac{١}{ر_{٢}} \right)}$



ونعود لحل المثال

$$\therefore \text{L.S.D} = ٢,١٣١ \times \sqrt{\frac{٢ \times ٤٤,٥٨}{٤}}$$

حيث ت الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية ١٥

هى ٢,١٣١

= ٢,١٣١ × ٤,٧٢ = ١٠,٠٨ دولار

، وبتوزيع المتوسطات الخمسة بطريقة تنازليا :

التوسطات تنازليا		أ	ب	جـ	ء	هـ
٥٢,٥	أ	٥٢,٥	٤٣,٧٥	٤٠	٤٠	٣٢,٥
٤٣,٧٥	ب	صفر	٨,٧٥	*١٢,٥	*١٢,٥	*٢٠
٤٠,٠٠	جـ		صفر	٣,٧٥	٣,٧٥	*١١,٢٥
٤٠,٠٠	ء			صفر	صفر	٧,٥
٣٢,٥٠	هـ				صفر	٧,١
						صفر

يتضح من العلامة * تعنى وجود فرق معنوي بين المتوسطين مثلا

(أ ، جـ) ، (ب ، هـ) وعلى ذلك فالإيضاح التالي يبين بسهولة

المتوسطات المتساوية

٥٢,٥ ٤٣,٧٥ ٤٠ ٤٠ ٣٢,٥

فالمتوسطات المتساوية هي التى تحتها خط فقط .

اختبار التباينات (التجانس)

أولا : اختبار تباينى مجموعتين (تجانس مجموعتين)

تهتم الاحصاء الوصفى بقياس تشتت البيانات وذلك لمعالجة ما قد تحدثه مقاييس النزعه المركزية من تضليل ، ويعد الانحراف المعيارى هو اهم الطرق الاحصائية فى قياس ووصف تشتت البيانات . فإذا قام باحث بحساب الانحراف المعيارى لدرجات امتحان مجموعتين من الطلاب فى مادة الاحصاء وتبين ان الانحراف المعيارى للمجموعة الاولى يساوى ٥ درجات ، وللمجموعة الثانية ١٠ درجات ، فإن الباحث يدرك ان طلاب المجموعة الأولى متقاربين فى الدرجات التى حصلو عليها ، أى ان التشتت فى درجاتهم متقارب أى ضيقا أى متجانس ، ومن ثم فإن درجات المجموعة الثانية متباعدة أى واسعا أى غير متجانس .



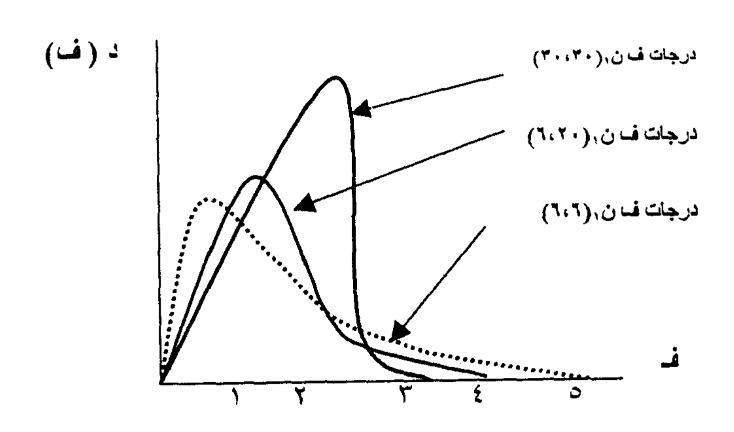
وعلى ذلك فالباحث لا يستطيع أن يصل الى قرار في شأن تجانس مجموعة واحدة ما لم يقم بمقارنة تشتتها بتشتت مجموعة ثانية ، أى يقارن بين الانحراف المعيارى للمجموعة الاولى بالانحراف المعيارى للمجموعة الثانية ، وهنا قد يجد الباحث ان الانحراف المعيارى للمجموعتين متساويين أى لا فرق بينهما ولذلك يستنتج ان المجموعتين متجانستين ، وقد يجد فرق بينهما والسؤال هل هذا الفرق فرق واضح له معنى أم انه فرق ظاهرى ناتج عن الخطأ العشوائى عند اختيار مجموعتى البحث ، وهنا يتدخل الاحصاء التحليلى لمعرفة ما اذا كان هذا الفرق معنوى ام غير معنوى ، والمختبر المعنى بالكشف عن معنوية هذا الفرق هو اختيار النسبة الفائية أي ف أو F وهو عبارة عن المعادلة التالية :

$$ف = \frac{ع_1^2}{ع_2^2}$$ **بدرجات حرارية (ن - ١) للبسط ، (ن - ١)**

للمقام ، وعلى أساس ان البسط يكون للتباين الكبير والمقام للتباين الصغير. وقد ثبت (العالم فيشر) ان استخدام النسبة الفائية للمقارنة بين تباينى مجتمعين هو الأصح لعملية المقارنة من استخدام اختبار الفرق بينهما .وتعتبر ف متغير عشوائى متصل تتراوح قيمته بين الصفر



والمالانهاية ولا يأخذ قيمة سالبة ذلك لانه عبارة عن نسبه بيـــن تبـــاينين كما فى الشكل التالى :-



و كما فى كل التوزيعات المتصلة فإن توزيع ف يعبر عن المساحة تحـــت المنحنى ، ويلاحظ ان شكل هذا المنحنى يتأثر بحجم العينتين ، ويقوم هـــذا التوزيع على انه اذا تم اخذ كل العينات الممكنه ذات الحجم ن$_1$ من مجتمـــع موزع توزيع طبيعى تباينه σ^2_1 ثم حسب تباين كل عينه من هذه العينـــات ع$^2_1$ بدرجات حريه (ن$_1$ − ١) ، ثم أخذت كل العينات الممكنة ذات الحجم ن$_2$ من مجتمع موزع توزيع طبيعى تباينه σ^2_2 ثم حسب تباين كل عينـــــه من هذه العينات ع$^2_2$ بدرجات حريه (ن$_2$ − ١)، فإن التوزيع التكـــــرارى لكل النسب الممكنة لتباينات عينـــات المجتمـــع الاول وتباينـــات عينـــات

المجتمع الثاني اى $\frac{ع_{1}^{2}}{ع_{2}^{2}}$ تتبع توزيع يسمى توزيع ف درجات حريه للبسط ودرجات حريه للمقام ، أى ان توزيع ف عبارة عن مجموعة من المنحنيات التكرارية يتميز كل منها عن الاخر برقمين لدرجات الحريه احدهما للبسط والاخر للمقام .

ولتوزيع فى جداول خاصه تبين قيم ف عند درجات حرية مختلفة لكلا من البسط والمقام بحيث يمثل الصف الاول فى هذا الجدول درجات الحريه للبسط ،وبحيث يمثل العمود الاول درجات الحرية للمقام ،وذلك عند مستوي معنوية ٥% او ١% وسيتضح ذلك عند تناول الامثلة التالية:

ثانيا : الامثلة :

مثـــــال ١

إذا كان الانحراف المعياري لدرجات امتحان ٣١ طالب فى مادة الاحصاء يساوى ٧ درجات ، ولعدد ٥١ طالب يساوى ٥ درجات

فالمطلوب :

١-احسب قيمه ف



٢- أوجد درجات الحريه

٣- أوجد قيمة ف الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ، ٠,٠١

٤- اختبر معنوية الفرق بين تباينى المجموعتين .

الحـــــل

١- ف = $\frac{\text{التباين الكبير}}{\text{التباين الصغير}}$ = $\frac{ع_1^2}{ع_2^2}$

= $\frac{٤٩}{٢٥}$ = ١,٩٦ وتسمى ف المحسوبة

٢-درجات الحريه = (ن – ١) للتباين الكبير ، (ن– ١) للتباين الصغير

= (٣١ – ١) ، (٥١ – ١)

= ٣٠ ، ٥٠

٣-ف الجدوليه عند مستوى معنويه ٠,٠٥ ، بالكشف فى جدول توزيـــع ف فى الصف الاول حيث درجات الحريه للتباين الكبير وفى العمـــود الاول يسارا حيث درجات الحريه للتباين الصغير ثم بتلاقيهما نحصـل على النسبه الفائية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ وأسفلها عند مســـتوى

معنويه ٠,٠١ وعلى ذلك تكون ف الجدولية عند مستوى معنويه ٠,٠٥ ودرجات حرية ٣٠ ، ٥٠ هى ١,٦٧ ، وعند مستوى معنويه ٠,٠١ هى ٢,٠٦

٤- بمقارنه ف المحسوبه بالجدولية عند مستوى معنويه ٠.٠٥ ودرجات حريه (٣٠، ٥٠) نجد أن :

ف المحسوبة > ف الجدولية لذلك فالفرق معنوى ومن ثم فالمجموعتين غير متجانستين من حيث التشتت بدرجة ثقه ٩٥%

مثـــــال ٢

البيانات التالية لفوجين من السياح وفقا لإنفاقهما على منتجات خان الخليلى بالدولار خلال أسبوع ، وكان الفوج الأول يتكون من ١٠ أفراد والفوج الثانى يتكون من ٨ أفراد :

الفوج الاول س١	١٠	١٨	١٥	١٦	١٠	١٢	١٨	٢٠	١٧	٢١
الفوج الثانى س٢	٢٥	٢٢	٣٥	٤٢	٣٠	٢٢	٢٨	٤٠		

والمطلوب :

اختبر صحة فرض الفوج أى $\sigma_{١}^{٢} - \sigma_{٢}^{٢}$

الحـــــل

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٢}^{٢}$	$س_{٢}^{٢}$
١٠	٢٥	١٠٠	٦٢٥
١٨	٢٢	٣٢٤	٤٨٤
١٥	٣٥	٢٢٥	١٢٢٥
١٦	٤٣	٢٥٦	١١٥٦
١٠	٣٠	١٠٠	٩٠٠
١٢	٢٢	١٤٤	٤٨٤
١٨	٢٨	٣٢٤	٧٨٤
٢٠	٤٠	٤٠٠	١٦٠٠
١٧		١٨٩	
٢١		٤٤١	
مجـ =١٥٧	مجـ =٢٣٦	مجـ = ٢٦٠٣	مجـ = ٧٢٥٨

$$ع^{٢}س_{١} = \frac{\text{مجـ } س_{٢}^{٢} - \frac{(\text{مجـ } س_{١})^{٢}}{ن}}{ن - ١} = \frac{٢٦٠٣ - \frac{(١٥٧)^{٢}}{١٠}}{٩} = ١٥,٣٤$$

$$ع^2_{س٢} = \frac{\text{مج س}^2_{٢} - \frac{(\text{مج س}_١)^2}{ن}}{ن - ١} = \frac{٢٦٠٣ - \frac{(٢٣٦)^2}{٨}}{١} = ٤٢,٢٩$$

$$\therefore ف = \frac{\text{التباين الكبير}}{\text{التباين الصغير}}$$

$$= \frac{٤٢,٢٩}{١٥,٢٤} = ٢,٦$$ وهى ف المحسوبة

∴ ف الجدوليه عند مستوى معنويه ٠,٠١ ودرجات حريه ٧،٩

هي ٦,٧١ .

∴ ف المحسوبه < ف الجدوليه وعليه فالفرق غير معنوى

∴ يقبل فرض العدم أى أن $σ^2_١ = σ^2_٢$ و من ثم فالمجموعتين متجانستين وهذا بدرجة ثقه ٩٩% .

ثانيا : اختبار تباينات عدة مجموعات (تجانس المجموعات) :

مثـــــال

اختبر تجانس ٨ أفواج سياحية من أوربا وفقا لانفاقهم اليومى (بـــالدولار) بمدينة الاقصر علما بان تباينات كل من الافواج ودرجات الحريه هى :

الفوج	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ع٢	٥,٢	٣٤,٢٢	٢٩,٩٣	٩,٨٢	١٩,٣	٢٠,٣٥	٢٣,٧١	١٠,١٦
درجات الحريه د٠ح	٨	٨	٨	٨	٨	٨	٨	٨

الحـــــل

الجدول الإحصائي اللازم :

د٠ح	ع٢	(د٠ح) ع٢	اللوغارتم الطبيعي لـ ع٢ (ع٢مـ)	(د٠ح) ع٢مـ
٨	٥,٢	٤١,٥٩	١,٦٤٨٧	١٣,١٨٩٦
٨	٣٤,٢٢	٢٧٣,٧٣	٣,٥٣٢٨	٢٨,٢٦٢٤
٨	٢٩,٩٣	٢٣٩,٤١	٣,٣٩٨٩	٢٧,١٩١٢
٨	٩,٨٢	٧٨,٥٧	٢,٢٨٤٤	١٨,٢٧٢٥
٨	١٩,٣	١٥٤,٤٢	٢,٩٦٠١	٢٣,٦٨٠٨
٨	٢٠,٣٥	١٦٢,٨١	٣,٠١٣١	٢٤,١٠٤٨
٨	٢٣,٧١	١٨٩,٧٠	٣,١٦٥٩	٢٥,٣٢٧٢
٨	١٠,١٦	٨١,٣٢	٢,٣١٨٤	١٨,٥٤٧٢
مج =٦٤	مج =١٥٢,٦٩	مج = ١٢٢١,٥٥	مج =٢٢,٣٢٢٣	مج = ١٧٨,٥٧٨٤

$$\therefore كا^{٢} = \frac{١}{د.ح\ المعدله}\left(جـ\,(د.ح)\left\{\frac{جـ(د.ح)\,ع^{٢}}{جـ(د.ح)}\right\}_{هـ} - جـ\,(د.ح)\,ع^{٢}_{هـ} \right)$$

عند درجات حريه ك -١

$$حيث\quad \frac{١}{د.ح\ المعدله} = ١+ \left\{\frac{١}{٣(ك-١)}\right\}\left\{١- \frac{١}{جـ\,(د.ح)}\right\}$$

$$\therefore \frac{١}{د.ح}\ المعدله\ للمثال = ١+ \left\{\frac{١}{٣(٨-١)}\right\}\left\{١- \frac{١}{٦٤}\right\}$$

$$= ١ + \frac{١}{٢١} \times .٩٨٤٣٧٥$$

$$= ١ + .٤٦٨٧٥ = ١,٠٤٦٩$$

$$\therefore كا^{٢}\ للمثال = \frac{١}{١.٠٤٦٩}\left(٦٤\left\{\frac{١٢٢١,٥٥}{٦٤}\right\}_{هـ} - ١٧٨,٥٧٨٤ \right)$$

$$= \frac{١}{١,٠٤٦٩}\left(٦٤ \times ٢,٩٤٨٩ - ١٧٨,٥٧٨٤ \right)$$

= ٩,٧ وهى $كا^{٢}$ المحسوبة

، $\because$ $كا^{٢}$ الجدولية عنـــد مســتوى معنويـــة ٠,٠٥ ودرجـــات حريـــه ٧

هى ١٤,٠٧ .

الفصل الثالث

اختبار النسب

تمهيد :

كثير ما يلجا الباحثون إلي عمل استمارة استبيان للحصول على البيانات ،وقد يحتوى الاستبيان على أسئلة من النوع الثنائي الاحتمال في الإجابة أي بنعم أو لا ، ولتحليل تلك البيانات يقوم الباحث بالتعرف على نسبه الأفراد الذين أجابوا بنعم ونسبه الافراد الذين أجابوا لا ، لكن اذا كانت تلك البيانات لمجموعتين فان التحليل الاحصائى الاعمق من ذلك يتطلب مقارنه نسبة أفراد المجموعه الاولى الذين أجابوا نعم بنسبة افراد المجموعه الثانية الذين أجابوا بنعم ايضا ، ولما كان فى الغالب يوجد فوق حسابى بين النسبتين فان الباحث يريد ان يعرف معنوية هذا الفرق ، وهنا يتم استخدام المعادله :

$$ى = \frac{ق_1 - ق_2}{\sqrt{ق(1 - ق)\left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)}}$$



حيث :

$ق_1$: النسبة في المجموعة الأولى

$ق_2$: النسبة في المجموعة الثانية

ق : النسبة العامة للمجموعتين

$ن_1$: عدد أفراد المجموعة الأولى

$ن_2$: عدد أفراد المجموعة الثانية

المقام : الخطأ المعياري للنسبتين

مثـــــال

إذا كان أحد أسئلة الاستبيان الموجهة لطلبة الفنادق هى :

هل استفدت من التدريب بالفندق نعم ( ) لا ( )

فإذا كان عدد الطالبات ١٢٥ طالبه ،وعدد الطلاب ٨٤ طالبا ، وكان عـدد الطالبات الذين أجابوا نعم ٩٠ طالبه ، وعدد الطلاب الذين اجابو نعـم ٧٠



طالبا، فهل يوجد فرق معنوى بين نسبة المستفدين من الطالبات ونســــبة المستفدين من الطلاب من التدريب بالفندق .

الحـــــــل

$$\text{ق}_١ = \frac{\text{عدد الطالبات الذين أجابوا نعم}}{\text{العدد نكلى للطالبات}}$$

$$= \frac{٩٠}{١٢٥} = .٧٢$$

$$\text{ق}_٢ = \frac{\text{عدد الطلاب الذين أجابوا نعم}}{\text{العدد لكلى للطلاب}}$$

$$= \frac{٧٠}{٨٤} = .٨٣$$

$$\text{ق} = \frac{٩٠ + ٧٠}{١٢٥ + ٨٤} = .٧٧$$

$$\therefore \text{ى} = \frac{\text{ق}_١ - \text{ق}_٢}{\sqrt{\text{ق}\,(١-\text{ق})\left(\frac{١}{\text{ن}_١} + \frac{١}{\text{ن}_٢}\right)}}$$

$$= \frac{٠,٧٢ - ٠.٨٣}{\sqrt{(٠,٧٧ \times ٠,٢٣)\left(\frac{١}{١٢٥} + \frac{١}{٨٤}\right)}}$$

$$= \frac{٠,١١}{\sqrt{(٠,١٧٧١)(٠,٠٠٨ + ٠,٠١٢)}} = \frac{.١١}{\sqrt{٠,٠٠٣٥}} = \frac{.١١}{٠,٠٥٩٥} = ١,٨٥$$



، ∵ ى الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٥ هى ١,٩٦

∴ى المحسوبة < ى الجدولية وعلية فالفرق غير معنوى بدرجة ثقة ٩٥%

∴ لا يوجد فرق معنوى بين نسبة الطالبات ونسبة الطلبة من حيث الاستفادة من التدريب بالفندق .

الفصل الرابع

اختبار الفرق بين التكرار المشاهد والتكرار التوقع

تمهيد :

نعلم أن بعض المفردات الإحصائية يمكن قياسها قياسا كميا كالمفردات المتعلقة بالأوزان أو الطول أو الحجم أو الدخل أو السن وتسمى هذه البيانات بالبيانات القياسية Measurements data ,كما نعلم ان البعض الاخر للمفردات الإحصائية لا يمكن قياسها قياسا كميا وانما قياسا عدديا كالمفردات الإحصائية المتعلقة بعدد السائحين الواصلين جوا وبرا وبحرا ,أو عدد نزلاء فنادق الدرجة الخامسة والرابعة والثالثة.. أو عدد الحشرات الميتة والحية فى تجربة معينة وتسمي هذه البيانات بالبيانات العددية Data Enumeration .



وقد نحتاج إلـــى مقارنـــة التكـــرارات المشـــاهدة Observed بالتكرارات المتوقعة Expected بهدف معرفة هـــل التكـــرار المشـــاهد يختلف عن التكرار المتوقع اختلافا بسيطا لا يعتد به أم اختلاف جوهـــوي، وقد وجد كارل بيرسون عام ١٨٩٩ أن الذى يحسم هـــذه الإجابـــة هـــو استخدام اختبار كا^{٢} :

$$كا^{٢} = مجـ \left[\frac{(ش - ق)^{٢}}{ق} \right] \quad \text{عند درجات حرية } (ن - ١)$$

حيث :

كا^{٢} : هى الحرف اليوناني كا وتقرأ كاى تربيع .

ش : التكرار المشاهد .

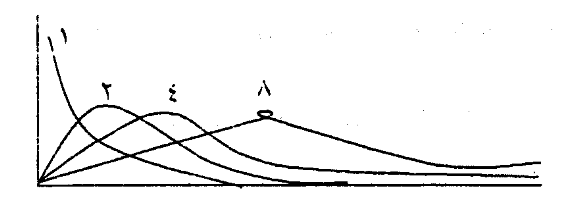
ق : التكرار المتوقع .

وتوزيع كا^{٢} يأخذ الشكل البيانى التالى وهو يوضح عدة منحنيـــات حســـب درجات الحرية :[١]

---

[١] دراسة هذا التوزيع ستتم فى مواضع آخرى .





فإذا كانت كا^{٢} = صفر دل ذلك على عدم وجود فرق بين التكرار المشاهد والتكرار المتوقع أي أنهما متساويان ، أما إذا زادت قيمة كا^{٢} عند الصفر دل ذلك على وجود فرق بين التكرار المشاهد والتكرار المتوقع ، وأنه باختبار هذا الفرق نتمكن من معرفة هل هو فرق ظاهرى أم فرق معنوى، ولدقة اختبار كا^{٢} يلزم توافر الشروط التالية :

١-أن يكون حجم العينة كبير .

٢-ألا يقل عدد التكرارات عن ٥٠ .

٣-ألا يقل التكرار فى الفئة الواحدة عن ٥ ، ولذلك يفضل ضم الفئات التى تحتوي على تكرارات غير كافية .



أمثلة تطبيقية :

أولا : التوزيع التكراري البسيط (متغير واحد) :

مثـــــال ١

إذا كانت البيانات المسجلة على عبوة مبيد حشري تفيد بأنـــه يتـم قتل ٨٠% من الحشرات بعد الرش بثلاث دقائق ، وأراد مسئول النظافـــة بالفندق اختبار تأثير هذا المبيد فقام برشه على ٤٠٠ حشرة ثم قام بحصـــر عدد الحشرات الميتة والحية المتبقية كما يلى :

التكرارات / المشاهدات	التكرار المشاهد (س)	التكرار المتوقع (ق)
الحشرات الحية	١٠٠	٨٠
الحشرات الميتة	٣٠٠	٣٢٠
المجموع	٤٠٠	٤٠٠

والمطلوب اختبار صدق البيانات المسجلة على العبوة .

الحـــل

والجدول الإحصائي اللازم :

التكرارات / المشاهدات الحشرات	ش	ق	ش – ق	(ش – ق)^٢ / ق
الحشرات الحية	١٠٠	٨٠	٢٠	٥
الحشرات الميتة	٣٠٠	٣٢٠	٢٠–	١,٢٥
المجموع	٤٠٠	٤٠٠	صفر	٦,٢٥



∵ كا^{٢} = مجـ $\left(\frac{(ش - ق)^{٢}}{ق} \right)$

= ٦,٢٥ وهى كا^{٢} المحسوبة

، ∵ كا^{٢} الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حريـــة (ن - ١)

= ٢ - ١ = ١ هى ٣,٨٤ .

∴ كا^{٢} المحسوبة < كا^{٢} الجدولية وعليه فالفرق معنوي

لذلك لا نقبل فرض العدم وبالتالي بيانات العبوة غير صادقة .

مثـــــال ٢

الجدول التالي هو جدول توزيع تكراري لعدد ٥٥٦ سائح وافد موزعيـــن حسب الجنسية :

الجنسية	فرنسي	انجليزي	إيطالى	أمريكي	المجموع
عدد السائحين	٣١٥	١٠١	١٠٨	٣٢	٥٥٦

وإذا علمت أن التوزيع المتوقع من تلك الجنسيات (التوقـــع بنـــاءا علـــى خبرات سابقة) هو ٩ : ٣ : ٣ : ١ على الترتيب ، فاختبر عما إذا كـــان التوزيع المشاهد (الفعلى) يتفق مع التوزيع المتوقع .



الحـــل

المشاهدات (الجنسية) / التكرارات	ش	ق	ش – ق	$\frac{(ش - ق)^2}{ق}$
فرنسي	٣١٥	٣١٢,٧٥	٢,٢٥	٠,٠١٦٢
إنجليزي	١٠١	١٠٤,٢٥	٣,٢٥–	٠,١٠١٣
إيطالي	١٠٨	١٠٤,٢٥	٣,٧٥	٠,١٣٤٩
أمريكي	٣٢	٣٤,٧٥	٢,٧٥–	٠,٢١٧٦
المجموع	**٥٥٦**	**٥٥٦**	**صفر**	**٠,٤٧**

∵ $كا^2 = مج \left(\frac{(ش - ق)^2}{ق} \right)$

= ٠,٤٧ وهى $كا^2$ المحسوبة

، ∵ $كا^2$ الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ درجات حرية (ن – ١)
= ٤ – ١ = ٣ هى ٧,٨١٥ .

∴ $كا^2$ المحسوبة < $كا^2$ الجدولية وعليه فالفرق غير معنوى .

لذلك نقبل فرض العدم ونستنتج أن المشاهد يتفق مع المتوقع .

مثـــــال ٣

الجدول التالي هو التوزيع التكراري النســـبي لتوقـــع الســـائحين القادمين إلى مصر عام ٢٠٠٠ ، والتوقع بنـــاءا علـــى الســـلوك الســـابق

للسياحة الوافدة إلى مصر .

دول العالم	اليابان	أوربا	العرب	أمريكا	جنوب شرق آسيا	المجموع
النسبة	١٠	٢٠	٤٠	٢٠	١٠	١٠٠%

وأنه بعد عام ٢٠٠٠ كان عدد السائحين الوافدين فعلا إلى مصر كما فـــي الجدول :

دول العالم	اليابان	أوربا	العرب	أمريكا	جنوب شرق آسيا	المجموع
النسبة	٩٢٠٠	٢٠٨٠٠	٣٦٠٠٠	٢٣٠٠٠	١١٠٠٠	١٠٠٠٠٠

والمطلوب : اختبر مدى صدق هذا التوقع ، إذا علمت أن كـــا^{٢} الجدوليـــة عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية ٤ = ٩,٤٩ .

الحـــــل

تكوين الجدول الإحصائي اللازم :

التكرار / دول العالم	المشاهد ش	المتوقع ق	(ش – ق)	(ش – ق)^{٢}	$\frac{(ش - ق)^{٢}}{ق}$
اليابان	٩٢٠٠	١٠٠٠٠	−٨٠٠		٦٤
أوربا	٢٠٨٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠		٣٢
العرب	٣٦٠٠٠	٤٠٠٠٠	−٤٠٠٠		٤٠٠
أمريكا	٢٣٠٠٠	٢٠٠٠٠	٣٠٠٠		٤٥٠
جنوب شرق آسيا	١١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠		١٠٠
المجموع	١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	صفر		١٠٤٦



$$\because \text{كا}^2 = \text{مجـ} \left(\frac{(\text{ش} - \text{ق})^2}{\text{ق}} \right)$$

$= ١٠٤٦$

، ∵ كا^2 الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية ٤ = ٩,٤٩

∴ كا^2 المحسوبة > كا^2 الجدولية .

∴ الفرق معنوي (لا نقبل فرض العدم)

∴ نستنتج أن المشاهد يختلف عن المتوقع أي أن هذا التقرير خالف الصواب .

ثانيا : التوزيع التكراري المزدوج (متغيرين) :

مثال ١

الجدول التالى يبين توزيع السائحين القادمين لمصر فى سنة ما حسب صفتين (متغيرين) الجنسية وطريقة الوصول :



طريقة الوصول / الجنسية	جو	بحر	بر	المجموع
شرق أوسط	٤٨٢	٥٨	٢٩٠	٨٣٠
أمريكا	١٣٥	١٥	٢٩	١٧٩
أوربا	٧٩٦	١٨٩	١٣٨	١١٢٣
المجموع	١٤١٣	٢٦٢	٤٥٧	٢١٣٢

والمطلوب : اختبر هل هناك علاقة بين جنسية السائح وطريقة الوصول إذا علمت أن كا٢ الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية ٤ تساوي ٩,٤٩ .

الحل

ملاحظات هامة فى حالة التوزيع التكراري المزدوج .

١-أن الاختبار فى هذه الحالة يبحث فى هل توجد علاقة بين المتغيرين أم لا ، بمعنى هل يوجد ارتباط بين المتغيرين أم لا ، بمعنى آخر هل المتغيرين غير مستقلين أي يتأثران ببعضها أم مستقلين فلا يتأثران ببعضها ، ويستخدم فى ذلك اختبار كا٢ .



٢-أن فرض العدم هو عدم وجود علاقة بين المتغيرين وعليه :

إذا كان كا^2 المحسوبة $<$ كا^2 الجدولية

∴ الفرق غير معنوي (نقبل فرض العدم)

∴ نستنتج عدم وجود علاقة بين المتغيرين ، لا ارتباط بينهما ، مستقلين .

وإذا كان كا^2 المحسوبة $>$ كا^2 الجدولية

∴ الفرق معنوي (لا نقبل فرض العدم)

∴ نستنتج وجود علاقة بين المتغيرين ، مرتبطين ، غير مستقلين .

٣-درجات الحرية = (عدد الصفوف -١) (عدد الأعمدة - ١)

٤- التكرار المتوقع لكل تكرار مشاهد= $\frac{\text{المجموع الهامشى الأفقى × المجموع الهامشى الرأسى}}{\text{المجموع الكلى}}$

الجدول الإحصائي اللازم لحساب التكرارات المتوقعة :

طريقة الوصول / الجنسية	جو		بحر		بر		المجموع
	ش	ق	ش	ق	ش	ق	
شرق أوسط	٤٨٢	٥٥٠	٥٨	١٠٢	٢٩٠	١٧٨	٨٣٠
أمريكا	١٣٥	١١٩	١٥	٢٢	٢٩	٣٨	١٧٩
أوربا	٧٩٦	٧٤٤	١٨٩	١٣٨	١٣٨	٢٤١	١١٢٣
المجموع	١٤١٣	١٤١٣	٢٦٢	٢٦٢	٤٥٧	٤٥٧	٢١٣٢

الجدول الإحصائي اللازم لحساب كا^{٢} :

ش	ق	ش − ق	(ش − ق)^{٢}	$\frac{(ش - ق)^{٢}}{ق}$
٤٨٢	٥٥٠	٦٨-		٨,٤
١٣٥	١١٩	١٦		٢.٢
٧٩٦	٧٤٤	٥٢		٣,٦
٥٨	١٠٢	٤٤-		١٨,٩
١٥	٢٢	٧-		٢.٢
١٨٩	١٣٨	٥١		١٨,٨
٢٩٠	١٧٨	١١٢		٧٠,٥
٢٩	٣٨	٩-		٢,١
١٣٨	٢٤١	١٠٣-		٤٤,٠
٢١٣٢	٢١٣٢	صفر		١٧٠,٧

$$\because \text{كا}^2 = \text{مجـ} \left[\frac{(\text{ش} - \text{ق})^2}{\text{ق}} \right]$$

$$= ١٧٠,٧$$

، ∵ كا^2 الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية ٤=٩,٤٩ معطى

∴ كا^2 المحسوبة > كا^2 الجدولية .

∴ الفرق معنوي (لا نقبل فرض العدم)

∴ نستنتج أن المتغيرين بينها علاقة أي بينها ارتباط أي غير مستقلين ، أي يوجد ارتباط بين جنسية السائح وطريقة القدوم ، وهذا القرار صحيح بدرجة ثقة ٩٥% .

، قياس قوة الارتباط بين الصفتين (المتغيرين) :

$$\text{ق} = \sqrt{\frac{\text{كا}^2 \text{ المحسوبة}}{\text{كا}^2 \text{ المحسوبة} + \text{ن}}}$$

حيث ق : معامل التوافق .

ن : المجموع الكلى للتكرارات .

$$\therefore \text{ق} = \sqrt{\frac{١٧٠,٧}{٢١٣٢ + ١٧٠,٧}} = \sqrt{\frac{١٧٠,٧}{٢٣٠٢,٧}}$$

$$= \sqrt{٠,٠٧٤} = ٠,٢٧$$

أي أن الارتباط أقل من المتوسط .



مثـــــــال ٢

الجدول التالي يوضح درجات امتحـــان ٥٢٠ طــالب فـــى مـــادتى الرياضة والإحصاء :

الرياضة / الإحصاء	ممتاز	جيد	ضعيف	المجموع
ممتاز	٥٠	٧٠	١٥	١٣٥
جيد	٤٥	١٦٠	٤٠	٢٤٥
ضعيف	١٥	٤٥	٨٠	١٤٠
المجموع	١١٠	٢٧٥	١٣٥	٥٢٠

والمطلوب : اختبار مقولة أن مستوى الطالب فى الرياضة مســـــتقل عن أدائه فى الإحصاء وذلك بدرجة ثقة ٩٥% .

الحـــــــل

١- فرض العدم هو أن مستوى الطالب فى الرياضة مســـــتقل عـــن مستواه فى الإحصاء ومن ثم فالفرض البديل أن مستوى الطالب فـــى الرياضة غير مستقل عن مستواه فى الإحصاء .



٢- ∵ درجة الثقة ٩٥%   ∴ α= ٥% .

ودرجات الحرية = (عدد الصفوف – ١) (عدد الأعمدة –١)

= (٣ – ١) (٣ – ١) = ٤

كا^{٢} الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حرية

٤ = ٩,٤٩

٣- الجدول الإحصائي اللازم لحساب التكرارات المتوقعة :

الرياضة / الاحصاء	ممتاز		جيد		ضعيف		المجموع
	س	ق	س	ق	س	ق	
ممتاز	٥٠	٢٨,٥٦	٧٠	٧١,٣٩	١٥	٣٥,٠٥	١٣٥
جيد	٤٥	٥١,٨٣	١٦٠	١٢٩,٥٧	٤٠	٦٣,٦١	٢٤٥
ضعيف	١٥	٢٩,٦١	٤٥	٧٤,٠٤	٨٠	٣٦,٣٤	١٤٠
المجموع	١١٠	١١٠	٢٧٥	٢٧٥	١٣٥	١٣٥	٥٢٠

٤- الجدول الإحصائي اللازم لحساب كا^{٢} :

ش	ق	ش - ق	(ش - ق)^2	$\frac{(ش - ق)^2}{ق}$
٥٠	٢٨,٥٦	٢١,٤٤	٤٥٩,٦٧	١٦,٠٩
٤٥	٥١,٨٣			
١٥	٢٩.٦١			
٧٠	٧١,٣٩			
١٦٠	١٢٩,٥٧			
٤٥	٧٤,٠٤			
١٥	٣٥,٠٥			
٤٠	٦٣,٦١			
٨٠	٣٦,٣٤			
٥٢٠	٥٢٠			

وهنا يلاحظ أنه لا داعى لإكمال الحسابات حيث أن كا^2 للصف الأول تساوي ١٦,٠٩ وهي بذلك أكبر من كا^2 الجدولية والتى تساوي ٩,٤٩ .

∴ الفرق معنوي (لا نقبل فرض العدم)

∴ نستنتج أن المتغيرين محل الدراسة (الرياضة والإحصاء) غير مستقلين عن بعضهما بل بينهما ارتباط ، ولحساب درجته يترك كتدريب .

مثـــــال ٣

فى دراسة عن مدى إقبال الطلبة والطالبات على قسم الفنادق كـــانت النتائج التالية :

متغير الاقبال / متغير النوع	أوافق	لا أوافق	المجموع
طالب	٨٠	٢٠	١٠٠
طالبة	٢٠	٤٠	٦٠
المجموع	١٠٠	٦٠	١٦٠

والمطلوب : اختبر مدى استغلال المتغيرين .

الحـــــل

الجدول الإحصائي اللازم لحساب التكرارات المتوقعة :

متغير الاقبال / متغير النوع	أوافق		لا أوافق		المجموع الهامشى
	ش	ق	ش	ق	
طالب	٨٠	٦٢,٥	٢٠	٣٧,٥	١٠٠
طالبة	٢٠	٣٧,٥	٤٠	٢٢,٥	٦٠
المجموع	١٠٠	١٠٠	٦٠	٦٠	١٦٠



الجدول الإحصائي اللازم لحساب $كا^2$:

ش	ق	ش – ق	$\frac{(ش - ق)^2}{ق}$
٨٠	٦٢,٥	١٧,٥	٤,٩
٢٠	٣٧,٥	١٧,٥ –	٨,٥
٢٠	٣٧,٥	١٧,٥ –	٨,٥
٤٠	٢٢,٥	١٧,٥	١٣,٦
١٦٠	١٦٠	صفر	٣٤,٥

$$\because كا^2 = مج \left(\frac{(ش - ق)^2}{ق} \right)$$

= ٣٤,٥ وتسمى $كا^2$ المحسوبة .

، $\because$ $كا^2$ الجدولية عند مستوي معنوية ٠,٠٥ درجات حريــة (٢-١)

(٢-١) = ١ هى ٢,٨٤ .

$\therefore$ $كا^2$ المحسوبة > $كا^2$ الجدولية وعليه فالفرق معنوى .

لذلك نرفض فرض العدم ونقول أن المتغــيرين غــير مســتقلين أي بينهما ارتباط بمعنى أن الاقبال على قسم الفنادق يتــأثر بــالنوع



طالب أم طالبة .

ملحوظة :

أنه فى حالة التوزيع التكراري المزدوج من النوع ٢ × ٢ كما في المثال السابق فإنه يمكن حساب كا^2 بطريقة أسهل كما يلى :

الجدول الإحصائي اللازم :

متغير الاقبال / متغير النوع	أوافق	لا أوافق	المجموع
طالب	أ	ب	أ + ب
طالبة	جـ	ء	جـ + ء
المجموع	أ + جـ	ب + ء	ن

$$كا^2 = ن \frac{(أ ء - ب جـ)^2}{(أ + جـ)(ب + ء)(جـ + ء)(أ + ب)}$$

وبالتطبيق على المثال السابق :

$$كا^2 = ١٦٠ \frac{(٨٠ \times ٤٠ - ٢٠ \times ٢٠)^2}{١٠٠ \times ٦٠ \times ١٠٠ \times ٦٠}$$

$$= ١٦٠ \times ٠,٢١٧٨$$

$= ٣٤,٨٤$ وهي نفس النتيجة السابقة .

وهنا يلاحظ أن تم الاعتماد فقط على التكرارات الفعلية دون الحاجة إلى تكرارات متوقعة .

وأخيرا فقد اتضح أن كا[٢] هو اختبار يستخدم في مقارنة مجموعة من التكرارات المشاهدة بتكراراتها المتوقعة ، وأن لهذا الاختبار استخدامات مباشرة تتمثل في :

١-الكشف عن معنوية الفرق بين التكرار الفعلي والتكرار المتوقع .

٢-الكشف عن معنوية استغلال متغيرين .

كما له استخدامات غير مباشرة تتمثل في :

١- التحقق من حسن التوفيق(المطابقة) Goodness of fit

٢-معامل فاى Phi Coefficient

٣- معاملات التوافق Coefficients Contingency

٤- اختبار الوسيط The Median Test

وأن التناول لباقي الاستخدامات سيكون في مواضع أخرى .

الباب الرابع

السلاسل الزمنية

الباب الرابع

يشتمل هذا الباب على النقاط التالية :

تمهيـــد :

- تعريف السلسلة الزمنية (اللفظى ، الرياضى ، البيانى)
- عناصر السلسلة الزمنية (الاتجاه العام ، الموسمية ، الدورية ، العرضية)
- خارج تحليل السلسلة الزمنية .
- تحليل السلسلة الزمنية وفقا للنموذج الضربي .

* قياس الاتجاه العام بطرق :
  - التمهيد باليد .
  - المتوسطات المتحركة .
  - المربعات الصغرى .
- اختبار معنوية الانحدار .
- التنبؤ بخط الاتجاه العام .

* قياس التغيرات الموسمية .

- قياس التغيرات الدريـــة .



التمهيـــد :

كثيرا ما نتعرض لدراسة ظاهرة مع مـــرور الزمـــن ، كدراســـة ظاهرة تذبذب الصادرات المصرية خلال فترة زمنية معينة ، أو دراســـة الحركة السياحية الوافدة خلال العقد الأخير أو .... ، وذلك بهدف إمكـــان إجراء التنبؤ بما يحتمل أن يحدث للظاهرة موضوع البحث فى المســـتقبل وبالتالي يمكن رسم استراتيجية لمواجهة الاحتياجات المقبلة . هـــذا مـــن ناحية ، ومن ناحية آخرى إمكان معرفة مدى تأثير العوامل المستقلة علـــى الظاهرة .

تعريف السلسلة الزمنية :

أ- التعريف اللفظى :

هى مجموعة متتالية من القرارات (المشاهدات أو البيانات) التـــى تسجل عادة على فترات زمنية متساوية عن إحدى الظواهر .



ب- التعريف الرياضى :

هى العلاقة الانحدارية للظاهرة مع الزمن أي

ص = د (س)

حيث ص : هي المتغير التابع والمعبر عن قيم الظاهرة .

س : هي المتغير المستقل والمعبر عن الزمن .

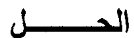
جـ - التعريف البيانى :

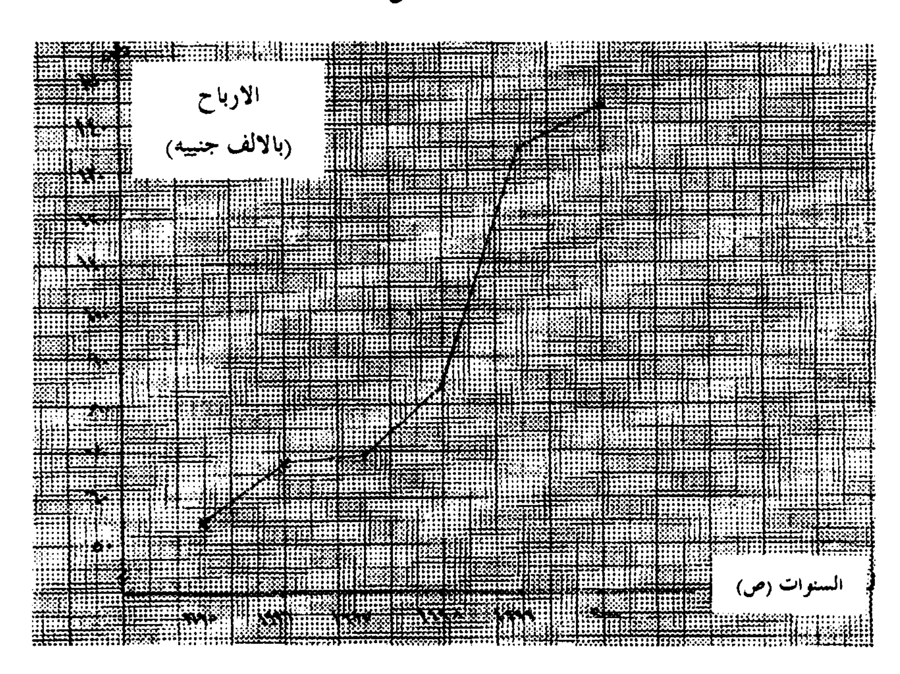
تمثل السلسلة الزمنية بيانيا بوضع المتغير المستقل (الزمن) علـــى المحور الأفقى ، والمتغير التابع (قيم الظـــاهرة) علـــى المحـــور الرأسى ، ثم يتم توقيع النقـــط (س ، ص) المعـــبرة عـــن قيـــم الظاهرة مع كل فترة زمنية ، ثم توصـــل النقـــط بخـــط منكســـر فنحصل على المنحنى التاريخى للسلسة الزمنية ، مثال ذلك :

الجدول التالى يوضح بيانات عن أرباح إحدى الشركات الســـياحية خـــلال الفترة الزمنية ١٩٩٥ - ٢٠٠٠ (بالألف جنيه) .

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
الأرباح	٥٥	٦٨	٦٩	٨٤	١٣٥	١٤٣

والمطلوب : الرسم البياني لهذه السلسلة الزمنية مع تدوين الملاحظات .





- يسمى الشكل البيانى بشكل الانتشار ، والخط الناتج بـــالمنحنى التـــاريخي للظاهرة وهو يبين مدى تقلبات الظاهرة بالزيادة أو النقصــــان أو الثبـــات خلال فترة الدراسة .



عناصر السلسلة الزمنية :

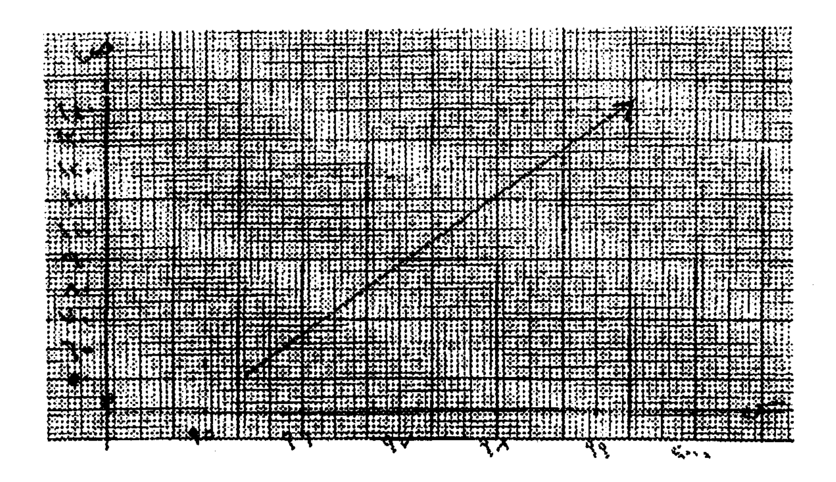
تتأثر أي سلسلة زمنية بتفاعل أربع عناصر مع بعضها ، وتسمى هذه العناصر بالتغيرات أو التقلبات أو المركبات وهى : التغيرات طويلة المدى (تغيرات الاتجاه العام) ، التغيرات الموسمية ، التغيرات الدورية ، التغيرات العرضية (الفجائية) .

أولا : تغيرات الاتجاه العام :

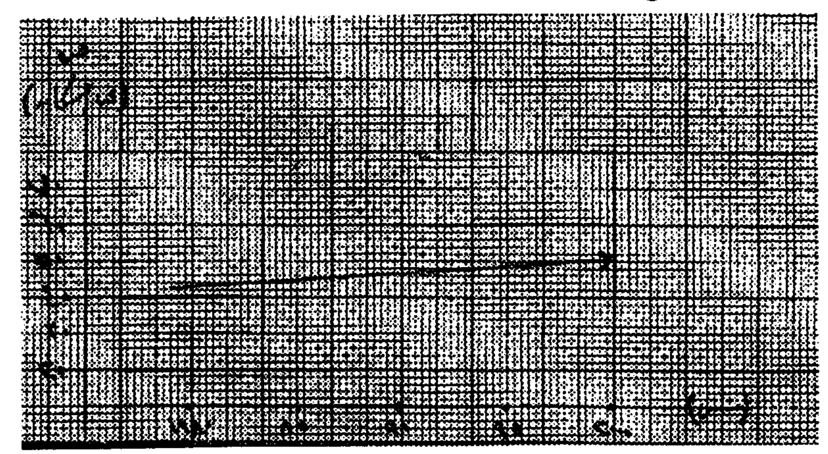
وهى تغيرات بالزيادة أو النقصان (أو الثبات) فى المدى الطويل للظاهرة دون الاهتمام بالتغيرات الآخرى ، ومثال ذلك :

(١)أرباح الشركات السياحية فى المثال السابق ، فهى تأخذ إتجاه عام بالزيادة خلال الفترة الزمنية (١٩٩٥ - ٢٠٠٠) كما فى الشكل التالى :

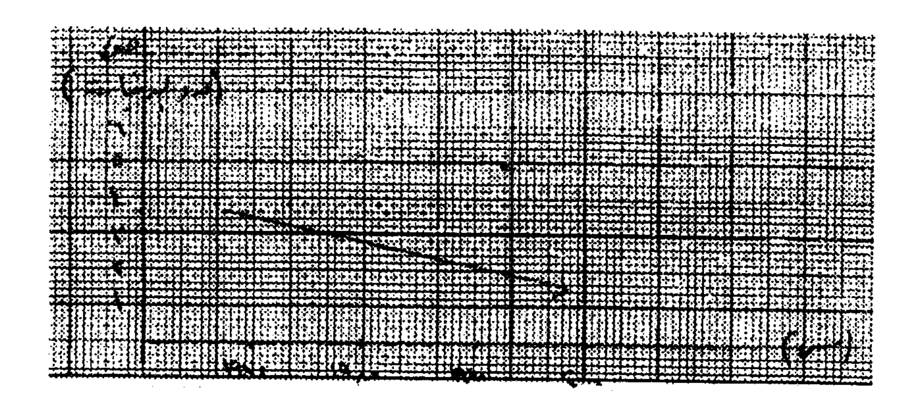




(٢)عدد السكان مع الزمن يأخذ اتجاه عام بالزيادة كما فى الشـكل التالى :

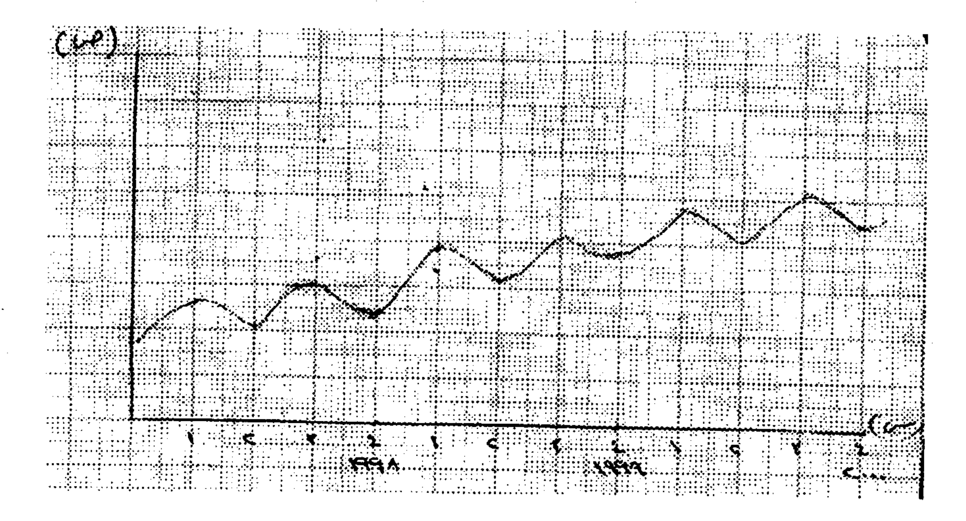


(٣)عدد الوفيات مع الزمن يأخذ اتجاه عام بالنقصان كمـــا فـــى الشكل التالى :



ثانيا : التغيرات الموسمية :

هى تغيرات تحدث خلال السنة على فترات صغيرة قد تكون يـوم أو أسبوع أو شهر أو ربع سنة أو نصف سنة أو ....، وتتكـــرر لعدة سنوات متتالية بشكل متماثل كما فى الشكل التالى :

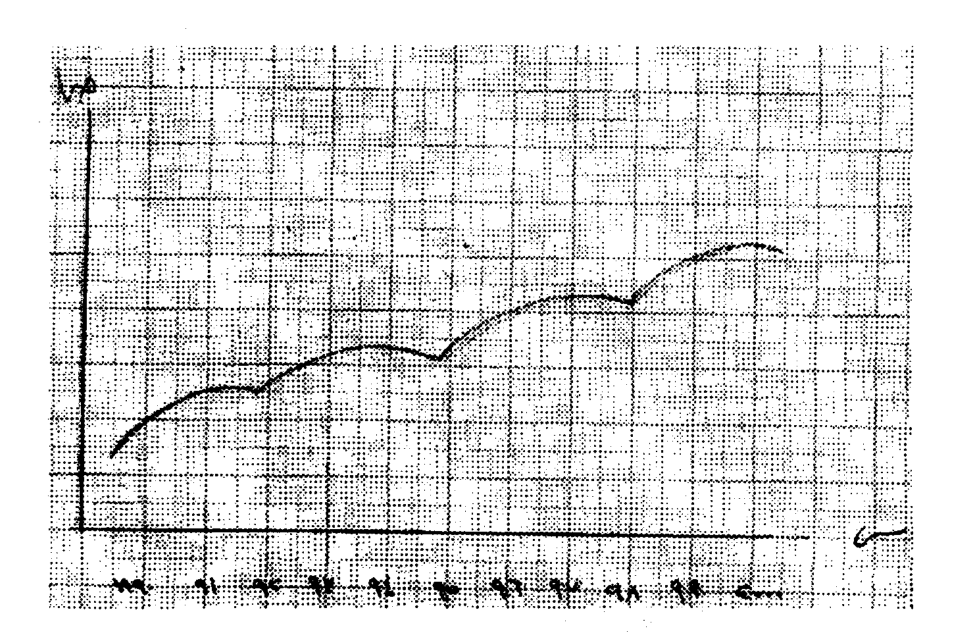




ومن أمثلتها زيادة نشاط البنوك فى الأيام الأولى من كل شـــهر ، إقبال الأفراد على المنتزهات فى أيام الجمع من كـــل أســبوع ، زيادة الأشغال الفندقى فى الأقصر فى فصل الشتاء .

ثالثا : التغيرات الدورية :

هى تغيرات تطرأ على السلسلة الزمنية فى فترات متباعدة يزيـــد طول كل منها على سنة ، وتشبه التغيرات الموسمية فى كونــــها تتكرر إلا أن فترة دورتها أكبر بكثير من التغيرات الموســـمية ، وتظهر فى المنحنى التاريخي على شكل موجـــات متتابعـــة مـــن التمدد والانكماش كما فى الشكل التالي :



رابعا : التغيرات غير المنتظمة (إنفجائية - العرضية) :

هي تغيرات لا يمكن التنبؤ بوقوعها ولا معرفة مقدارها أو اتجاهها لأنها لا تتبع قانون أو قاعدة كما أنها لا تتكرر . ومن أمثلتها الزلازل والبراكين والأوبئة والحريق والحروب ....

نماذج تحليل السلسلة الزمنية :

١ - النموذج التجميعي :

يفترض هذا النموذج أن قيمة الظاهرة (ص) عند لحظة زمنية معينة (س) هي عبارة عن مجموع العناصر الأربعة المؤثرة أي أن :

$$ص = ج + م + د + ع$$

حيث : ج هي التغيرات الاتجاهية ، م هي التغيرات الموسمية ، د هي التغيرات الدورية ، ع هي التغيرات العرضية .



ب- النموذج الضربي :

يفترض هذا النموذج أن قيمة الظاهرة هي عبارة عـــن حـــاصل ضرب العناصر الأربعة أي أن :

ص = ج × م × د × ع

تحليل السلسلة الزمنية وفقا للنموذج الضربي :

يقصد بتحليل السلسلة الزمنية هو عزل كل مركب من المركبـــات الأربعة فيها على حده وذلك لمعرفة مقدار واتجاه هذه المركبـــات (التغيرات ، التقلبات) ، ويجرى تحليل السلســـلة الزمنيـــة وفقـــا للنموذج الضربى أي أن :

التغيرات الكلية = التغيرات الاتجاهية × التغيرات الموسمية × التغيرات الدورية × التغيرات العرضية

ى = ج × م × د × ع



وأنه إذا ما تم قياس التغيرات الإتجاهية (الاتجاه العـام) وعزلـها تصبح المتغيرات المتبقية المؤثرة على الظاهرة هـي التغـيرات الموسمية والدورية والعرضية ، وإذا مـا تـم قيـاس الموسـمية وعزلها يصبح المتبقى هو أثر الدورية والعرضية ، وإذا مـا تـم قياس الدورية وعزلها يصبح المتبقى هو أثر العرضية فقط .

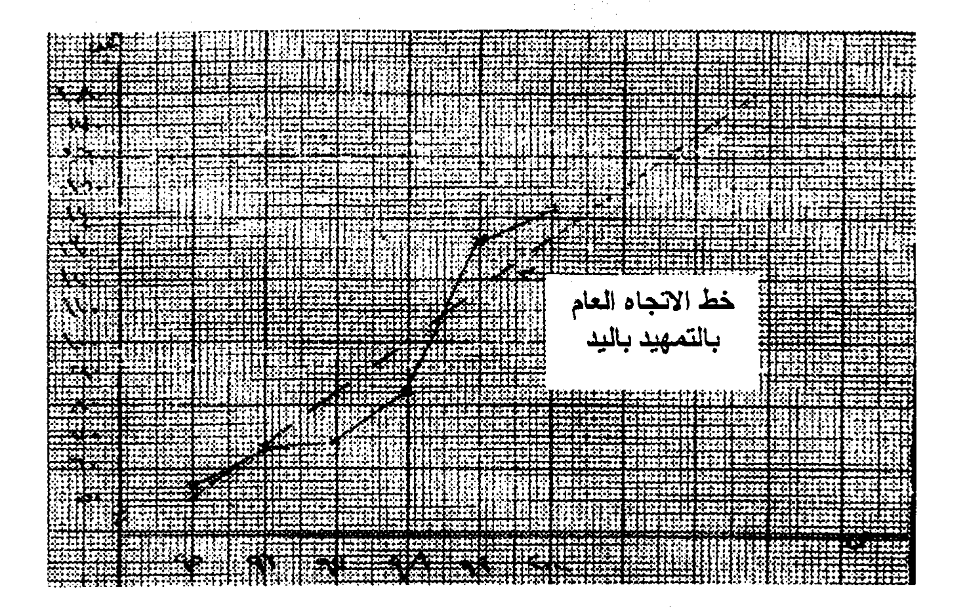
قياس تغيرات السلسلة الزمنية لإمكان تحليلها :

يبدأ تحليل السلسلة الزمنية بقياس الاتجاه العام ويقاس الاتجاه العام بالتمهيد باليد أو بالمتوسطات المتحركة أو بالمربعات الصغرى .

(١) **طريقة التمهيد باليد :**

باستخدام المثال السابق عن تطور أرباح إحدى الشركات السـياحية ثم قياس (تقدير) خط الاتجاه العام بالتمهيد كما يلى :





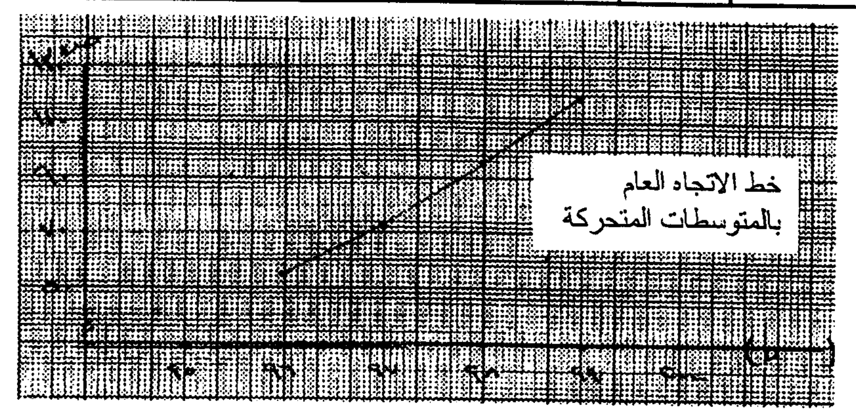
تعتمد هذه الطريقة على رسم خط باليد يتوسط قيم الظاهرة على المنحنى التاريخي لها ، بمعنى أن عدد النقط أعلى الخط تساوي تقريبا عدد النقط أسفله ، وبالتالي يمكن استخدام هذا الخط في التنبؤ . تمتاز هذه الطريقة بالسهولة ألا أنه يعاب عليها بأنها غير دقيقة لاختلاف تقديرها باختلاف الأشخاص .

(٢) طريقة المتوسطات المتحركة :

هي طريقة يتم فيها تقدير خط الاتجاه العام على أساس إيجاد متوسطات متحركة لبيانات السلسلة الزمنية لتصبح ممهدة بيانيا ،

وإذا لم يتحقق التمهيد يتم إيجاد متوسطات متحركة مرة أخرى ليس للبيانات الأصلية وإنما لمتوسطاتها المتحركة . تمتاز هذه الطريقة بأنها تقدر خط الاتجاه العام بشكل أفضل من الطريقة السابقة ، ويعاب عليها بأنها تؤدى إلى اختصار بيانات السلسلة الزمنية مما يقلل من جودة التقدير (القياس) ، وقد تم تقدير خط الاتجاه العام بطريقة المتوسطات المتحركة للمثال السابق كما يلى:

السنوات (س)	الارباح (ص)	٣ سنوات مجموع متحرك	المتوسط المتحرك
١٩٩٥	٥٥		
١٩٩٦	٦٨	١٩٢	١٩٢ ÷ ٣ = ٦٤,٠٠
١٩٩٧	٦٩	٢٢١	٢٢١ ÷ ٣ = ٧٣,٧٠
١٩٩٨	٨٤	٢٨٨	٢٨٨ ÷ ٣ = ٩٦,٠٠
١٩٩٩	١٣٥	٣٦٢	٣٦٢ ÷ ٣ = ١٢٠,٧
٢٠٠٠	١٤٣		





(٣) طريقة المربعات الصغرى :

هي الطريقة التى فيها يتم تقدير أفضل خط للاتجاه العام (مستقيم أو منحنى) على أساس إيجاد المعادلة التى تجعل مجموع المربعات أصغر ما يمكن ، وقد سبق فى الجزء الأول من هذا الكتاب شرح كيفية إيجاد هذه المعادلة .

وقد تم تقدير خط الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى للمثال السابق كما يلى :

∵ شكل الانتشار يوضح أن الخط الذى يناسب سلوك هذه المتغيرات هو خط مستقيم ، لذلك فالمعادلة فى هذه الحالة هى ص = أ + ب س ،
وعلية فالمعادلتين الطبيعيتين لإيجاد معادلة هذا الخط هما :

مجـ ص = ن أ + ب مجـ س

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ س ص

∴ الجدول الإحصائي اللازم لإيجاد معادلة الاتجاه العام :



السنوات	س	ص	س ص	س²
١٩٩c	٠	٥٥	٠	٠
١٩٩٦	١	٦٨	٦٨	١
١٩٩٧	٢	٦٩	١٣٨	٤
١٩٩٨	٣	٨٤	٢٥٢	٩
١٩٩٩	٤	١٣٥	٥٤٠	١٦
٢٠٠٠	٥	١٤٣	٧١٥	٢٥
المجموع	١٥	٥٥٤	١٧١٣	٥٥

٥٥٤ = ٦ أ + ١٥ ب (١)

١٧١٣ = ١٥أ + ٥٥ ب (٢)

١٣٨٥ = ١٥أ + ٣٧,٥ ب (١) بضرب (١) × ٢,٥ وبالطرح

---

٣٢٨ = + ٢٠١٧,٥

∴ ب = ١٨,٧

وبالتعويض بقيمة ب تساوى ١٨,٧ فى المعادلة (١)

٥٥٤ = ٦ أ + ١٥ × ١٨,٧



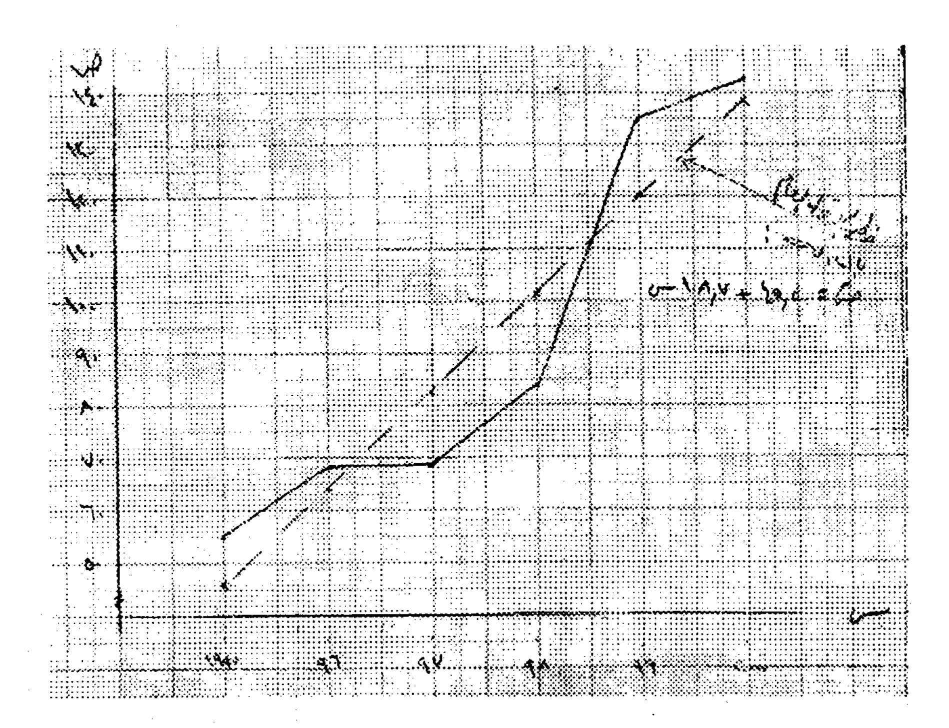
∴ أ = ٤٥,٥

∴ص = ٤٥,٥ + ١٨,٧ س وهذه هي معادلة الاتجـاه العـام التى تعبر عن سلوك البيانات للظاهرة فى المثال محل الدراسة .

∴ الجدول الإحصائي اللازم لإيجاد القيم الإتجاهية ورسم خـط الاتجـاه العام بيانيا :

السنوات	س	ص	صَ = ٤٥,٥ + ١٨,٧ س	صَ	(ص-صَ)
١٩٩٥	٠	٥٥	=٤٥,٥ + ١٨,٧ ×٠	٤٥,٥	٩,٥
١٩٩٦	١	٦٨	=٤٥,٥ + ١٨,٧ ×١	٦٤,٢	٣,٨
١٩٩٧	٢	٦٩	=٤٥,٥ + ١٨,٧ ×٢	٨٢,٩	-١٣,٩
١٩٩٨	٣	٨٤	=٤٥,٥ + ١٨,٧ ×٣	١٠١,٦	-١٧,٦
١٩٩٩	٤	١٣٥	=٤٥.٥ + ١٨,٧ ×٤	١٢,٣	١٤,٧
٢٠٠٠	٥	١٤٣	=٤٥,٥ + ١٨,٧ ×٥	١٣٩,٠	٤,٠
المجموع	١٥	٥٥٤		٥٥٤	صفر





اختبارات المعنوية للانحدار :

أولا : اختبار معنوية معامل الانحدار (ب) للمثال محل الدراسة :

الجدول الإحصائي اللازم :

(ص- صَ)	٩,٤	٣,٧	-١٣,٩	-١٧,٨	١٤,٦	٤,٠	المجموع = صفر
^{٢}(ص- صَ)	٩٠,٢٥	١٣,٦٩	١٩٣,٢١	٣٠٩,٧٦	٢١٣,١٦	١٦,٠	المجموع = ٨٤١,٢٦

الخطأ المعياري لتقدير خط الانحدار ($خ_{ص/س}$) = $\sqrt{\frac{مج\,(ص - صَ)^{٢}}{ن - ٢}}$

ويرجع السبب فى القسمة على ن – ٢ (درجات الحرية) إلـــى أن عـــدد المتغيرات اثنين وهما ص ، س .

$$\therefore \text{خ}_{\text{ص/س}} \text{ للمثال } = \sqrt{\frac{٨٤١,٢٦}{٦ - ٢}} = ١٤.٤٨$$

، الخطأ المعياري لمعامل الانحدار (خ~ب~) $= \text{خ}_{\text{ص/س}} \times \sqrt{\frac{١}{\text{مجـ س}^٢ - \frac{(\text{مجـ س})^٢}{\text{ن}}}}$

$$\therefore \text{خ}_{\text{ب}} \text{ للمثال } = ١٤,٤٨ \times \sqrt{\frac{١}{٥٥ - ٣٧,٥}}$$

$$= ٣,٤٦٦$$

$$، \because \text{ت} = \frac{\text{ب}}{\text{خ}_{\text{ب}}}$$

$$\therefore \text{ت للمثال} = \frac{١٨,٧٤}{٣,٤٦٦} = ٥,٣٩٥$$ وتسمى ت المحسوبة

، $\because$ ت الجدولية عنـــد مســتوى معنويـــة ٠,٠٥ ودرجـــات حريـــة ٤ هي ٢,٧٧٦ .

$\therefore$ ت المحسوبة > ت الجدولية وعليه فالفرق معنوي

$\therefore$ معامل الانحدار ب معنوي أي حقيقي بدرجة ثقة ٩٥% .



ثانيا : اختبار معنوية الانحدار ككل للمثال محل الدراسة :

يستخدم فى هذا الاختبار جدول تحليل التباين ANOVA كما يلى :

الجدول الإحصائي اللازم :

ص	صَ	(ص -صَ)^2	(صَ - صَ)^2	(ص - صَ)^2
٥٥	٤٥,٤٨			
٦٨	٦٤,٢٢			
٦٩	٨٢,٩٦			
٨٤	١٠١,٧٠			
١٣٥	١٢٠,٤٥			
١٤٣	١٣٩,١٩			
٥٥٤	٥٥٤	٨٤٠,٠٥	٦١٤٧,٢٨	٦٩٨٧,٣٣

نظرا لوجود كسور فى قيم صَ فإن استخدام طريقة الفروق ستجعل عمليات تقريب الكسر العشرى تتراكم ومن ثم تظهر أخطاء فى الحسلب ، ولذلك من الأفضل اتباع طريقة المربعات للقيم الأصلية وفقا للقوانين التالية :

$$مج (ص - صَ)^2 = مج ص^2 - \frac{(مج ص)^2}{ن}$$



= ٥٨١٤٠ − ٥١١٥٢,٦٧ = ٦٩٨٧.٣٣

، مج (صَ − $\overline{\text{صَ}}$)^{٢} = مج صَ^{٢} − $\frac{(\text{مج } \overline{\text{صَ}})^{٢}}{\text{ن}}$

= مج صَ^{٢} − $\frac{(\text{ن } \overline{\text{صَ}})^{٢}}{\text{ن}}$

= مج صَ^{٢} − $\frac{(\text{مج ص})^{٢}}{\text{ن}}$

= ٥٧٢٩٩,٩٥ − ٥١١٥٢.٦٧ = ٦١٤٧,٢٨

، مج (ص − صَ)^{٢} = مج ص^{٢} − مج صَ^{٢} *

= ٥٨١٤٠ − ٢٧٢٩٩,٩٥ = ٨٤٠,٠٥

---

* إثبات أن مج (ص − صَ)^{٢} = مج ص^{٢} - مج صَ^{٢}

∵ مج (ص − صَ)^{٢} = مج ص^{٢} - ٢ مج ص مج صَ + مج صَ^{٢}

= مج ص^{٢} - مج صَ (٢مج ص − مج صَ)

= مج ص^{٢} - مج صَ × مج صَ حيث مج ص = مج صَ

= مج ص^{٢} − مج صَ

هـ.ط.ث



، جدول تحليل التباين :

مصدر التباين	درجات الحرية	مجموع مربعات	متوسط مجموع مربعات	F
الانحدار	١	٦١٤٧,٢٨	٦١٤٧,٢٨	٢٩,٢٧
الباقى	٤	٨٤٠,٠٥	٢١٠,٠١	
الاجمالى	٥	٦٩٨٧,٣٣		

، ∵ F الجدولية عند مستوى معنوية ٠,٠٥ ودرجات حريـــة (١ ، ٤)

هي ٧.٧ .

∴ F المحسوبة > F الجدولية وعليه فالفرق معنوي .

∴ المعادلة المعبره عن سلوك البيانات معادلة معنوية بدرجة ثقـــه ٩٥%

وبالتالي تصلح للتنبؤ .

ملاحظات هامة على تحليل التباين للإنحدار :

(١) $\frac{\sqrt{\text{مج}(ص - \bar{ص})^2 \times \text{مج}(س - \bar{س})^2}}{\text{مج}(س - \bar{س})^2}$ = معامل الانحدار ب

وللمثال $\frac{\sqrt{٦١٤٧,٢٨ \times ١٧,٥}}{١٧,٥} = \frac{٣٢٨}{١٧,٥} =$ ١٨,٧٤ وهـــى فعــلا

قيمة ب ، مما يؤكد صحة إجراءات التحليل .



(٢) مجـ (ص − $\overline{ص}$)^{٢} تسمى بالتباين الكلى .

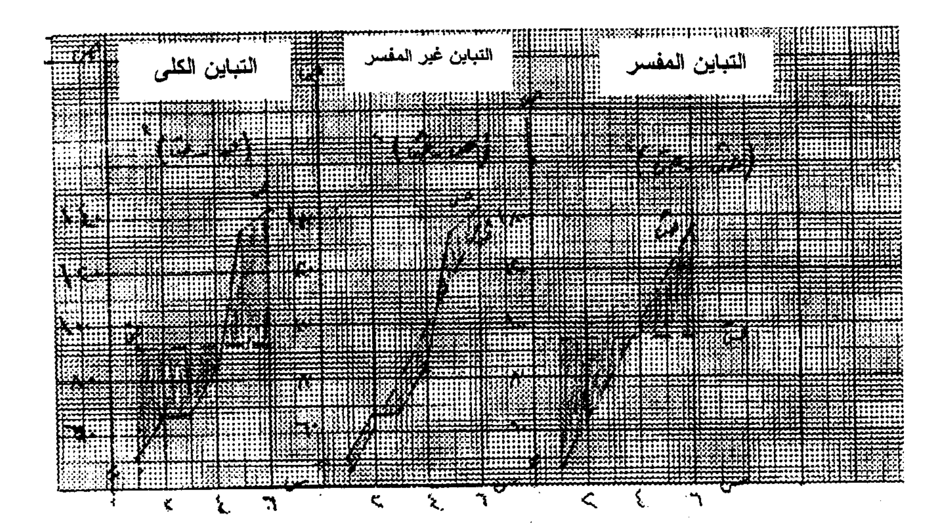
، مجـ (ص − $\hat{ص}$)^{٢} تسمي بالتباين غير المفسر وهـــو المرتبـــط بالخطـــأ المعياري .

، مجـ ($\hat{ص}$ − $\overline{ص}$)^{٢} = تسمى بالتباين المفسر وهو المرتبـــط بمعـــامل التحديد ، حيث معامل التحديد ورمزه (ر^{٢}) هو النسبة بين التباين المفســو والتباين الكلى أي :

$$ر^{٢} = \frac{مجـ (\hat{ص} - \overline{ص})^{٢}}{مجـ (ص - \overline{ص})^{٢}}$$

وتتضح تلك التباينات فى الأشكال البيانية التالية :





ولما كان معامل التحديد ($ر^2$) هو النسبة بين التباين المفسر والتباين الكلي

أي :

$$ر^2 = \frac{\text{مج}(\hat{ص} - \bar{ص})^2}{\text{مج}(ص - \bar{ص})^2}$$

$$\therefore ر = \pm \sqrt{\frac{\text{مج}(\hat{ص} - \bar{ص})^2}{\text{مج}(ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{\text{مج س ص} - \frac{\text{مج س . مج ص}}{ن}}{\sqrt{\left[\text{مج س}^2 - \frac{(\text{مج س})^2}{ن}\right]\left[\text{مج ص}^2 - \frac{(\text{مج ص})^2}{ن}\right]}}$$

وتسمى ر بمعامل الارتباط .

∴ ر للمثال $= \sqrt{\frac{٦١٤٧,٢٨}{٦٩٨٧,٣٣}} = ٠,٩٤$ أي الارتباط قوى جدا

وهى نفس النتيجة إذا ما تم استخدام قانون الارتباط البسيط الـــذي

على صورة :

$$ر = \frac{مجـ س ص - \frac{مجـ س . مجـ ص}{ن}}{\sqrt{\left[مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}\right]\left[مجـ ص^{٢} - \frac{(مجـ ص)^{٢}}{ن}\right]}}$$

حيث باستخدام بيانات الجدول الإحصائي اللازم لإيجاد خط الاتجاه العام :

$$ر = \frac{١٧١٣ - \frac{١٥ \times ٥٥٤}{٦}}{\sqrt{\left[٥٥ - \frac{١٥^{٢}}{٦}\right]\left[٥٨١٤٠ - \frac{٥٥٤^{٢}}{٦}\right]}}$$

$$= \frac{٣٢٨}{\sqrt{١٧,٥ \times ٦٩٨٧,٣٣}} = \frac{٣٢٨}{٣٤٩,٦٨} = ٠,٩٤$$

التنبؤ بخط الاتجاه العام :

التنبؤ عبارة عن تقدير لما يمكن أن تكون عليـــه المشـــاهدات أو

الظواهر إذا لم تتغير العوامل المؤثرة على تلك المشـــاهدات أو الظواهـــر



تحت التقدير فى المستقبل ، أما إذا تغيرت تلك العوامل المؤثــرة فيجــب تغيير تلك العوامل وفقا لتوقعات واحتمالات التغير فيها .

ويشترط فى التنبؤ ألا يكون هناك غموضا فى الأفكـــار أو الآراء أو القواعد أو الطرق المستخدمة فى التنبؤ ، ويجرى التنبؤ بعـــدة طــرق تختلف فيما بينها حسب طبيعة الظاهرة المراد التنبؤ بها ، وحســب نــوع التنبؤ فى كونه تنبؤ قصير المدى أو تنبؤ طويل المدى ، وعادة يتم اختيــار طريقة التنبؤ التي تتمشى مع كمية ونوعية المعلومات والبيانات الإحصائية المتوفرة ، ونوع التنبؤ المرغوب إجراءه ، ودرجـــة الدقــة المطلوبــة ، ومدى خبرة الإحصائي بتداول مثل هذه الطرق ، ومن الطرق الشائعة فـــى إجراء التنبؤ :

- طريقة استكمال الاتجاه العام .
- طــريقة تحليل الانحـــدار .

وتبنى طريقة استكمال الاتجاه العام على فكرة أن الحـــاضر مـــا هـــو إلا امتداد للماضي ، وأن العوامل التي أثرت على الظاهرة فى الماضي سوف



تستمر فى التأثير على الظاهرة فى المستقبل بنفس درجة التـــأثير ، وأن تأثير تلك العوامل تعتبر دالة فى الزمن ، وعلى ذلك يمكن استخدام الزمــن كعامل مؤثر على الظاهرة المراد التنبؤ بقيمتها كبديل لتلك العوامل

ويجب ألا يغيب عن البال أن درجة الدقة فى النتائج وبالتالي الثقــة فيها تتناقص بزيادة فترة الاستكمال ، وعموما يجب ألا تتعدى فترة التنبــؤ مثل فترة الاعتبار (الأساس) التى قيست الدالة منها ، وتنقسم دوال الاتجــاه العام إلى ثلاثة أنواع حسب شكل المنحنى التاريخي للظاهرة :

- دوال كثيرة الحدود .
- دوال أسيـــــــة .
- دوال لوجستيـــــة .

ويكتفي فى هذا المقام النوع الأول بل وفى أبسط أشـــكالها وهـــي الدالـــة الخطية حيث ص = أ + ب س .

وللتنبؤ بخط الاتجاه العام للمثال محل الدراسة تتبع الآتى :



الجدول الإحصائي اللازم :

السنوات	س	ص	صَ	= ٤٥,٥ + ١٨,٧ س
١٩٩٥	٠	٥٥	٤٥,٥	= ٤٥,٥ + ٠
١٩٩٦	١	٦٨	٦٤,٢	= ٤٥,٥ + ١٨,٧ × ١
١٩٩٧	٢	٦٩	٨٢,٩	
١٩٩٨	٣	٨٤	١٠١,٦	
١٩٩٩	٤	١٣٥	١٢٠,٣	
٢٠٠٠	٥	١٤٣	١٣٩,٠	
٢٠٠١	٦		١٥٧,٧	= ٤٥,٥ + ١٨,٧ × ٦
٢٠٠٢	٧		١٧٦,٤	
٢٠٠٣	٨		١٩٥,١	
٢٠٠٤	٩		٢١٣,٨	
٢٠٠٥	١٠		٢٣٢,٥	

ملاحظات :

١-أن فترة الأساس هي الفترة من ١٩٩٥ إلي ٢٠٠٠ وتبلغ ٥ سنوات .

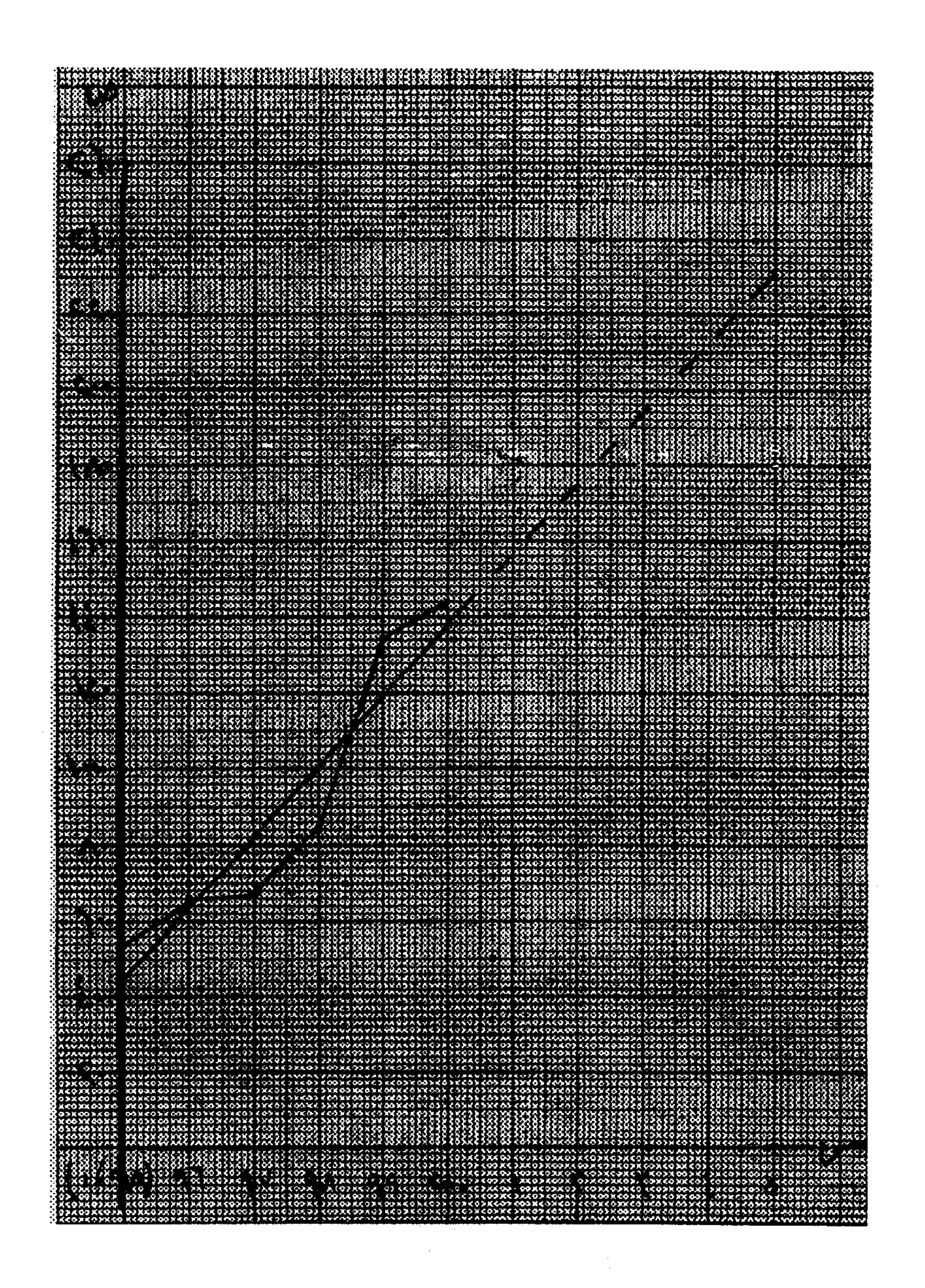
٢-أن فترة التنبؤ هي الفترة من ٢٠٠١ إلي ٢٠٠٥ وتبلغ ٥ سنوات .

٣-من الممكن جعل سنة الأساس والتي تساوي الصفر في منتصف



السلسلة الزمنية .

٤-يتضح ذلك فى العرض البياني التالي :



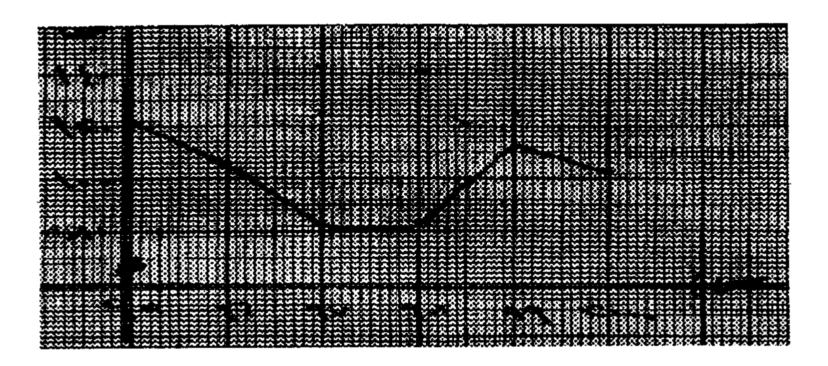


عزل أثر الاتجاه العام :

يتم عزل (استبعاد) أثر الاتجاه العام عن طريق تحويل قيم السلسلة الزمنية إلى نسبة مئوية من القيم الاتجاهية المناظرة لها ، ومن ثم يكون الناتج هو تأثير التغيرات الدورية والعرضية إذ لا يوجد تأثير للتغيرات الموسمية فى هذا المثال لكون البيانات سنوية ، ويتضح ذلك فيما يلى :

السنوات	ص (الفعلية)	صَ (الاتجاهية)	$\frac{ص}{صَ} \times ١٠٠$ (الدورية والعرضية)
١٩٩٥	٥٥	٤٥,٥	١٢١
١٩٩٦	٦٨	٦٤,٢	١٠٦
١٩٩٧	٦٩	٨٢,٩	٨٣
١٩٩٨	٨٤	١٠١,٦	٨٣
١٩٩٩	١٣٥	١٢٠,٣	١١٢
٢٠٠٠	١٤٣	١٣٩,٠	١٠٣

ويتضح ذلك بيانيا فيما يلى :

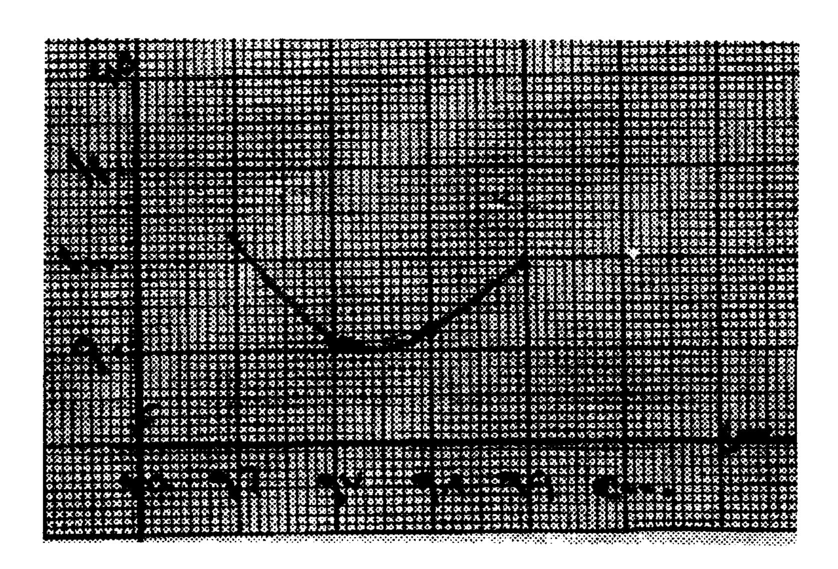




وأنه يأخذ متوسطات متحركة لقيم (التغيرات الدورية والعرضيـــة) فإنـــه يكون قد تم عزل أثر التغيرات العرضية ويصبح الباقي هو تأثير التغيرات الدورية فقط ، ويتضح ذلك للمثال محل الدراسة كما يلى :

السنوات	١٩٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	٢٠٠٠
التغيرات الدورية العرضية $\frac{ص}{ص\hat{}} \times ١٠٠$	١٢١	١٠٦	٨٣	٨٣	١١٢	١٠٣
المتوسطات المتحركة		١٠٣,٢	٩٠,٧	٩٢,٧	٩٩,٣	

ويتضح ذلك فى العرض البياني التالي :



وبهذا يكون قد تم تحليل السلسلة الزمنية ومعرفة أثر كل متغيراتها .



مثال آخر يتناول بيانات شهرية (التغيرات الموسمية)

الجدول التالى يوضح نسب الأشغال الفندقي فى محافظة القـــاهرة خـــلال الفترة (٩٦ – ١٩٩٨) :

السنوات / الشهور	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
١٩٩٦	٦٨	٦٤	٦٩	٦٨	٦٠	٥١	٤٦	٧٨	٧٠	٧٩	٦٨	٦٤
١٩٩٧	٦٤	٧٢	٦٦	٦٦	٦٨	٦٣	٧٢	٧٨	٦٨	٧٥	٧٣	٤١
١٩٩٨	٢٥	٣٧	٣٩	٣٥	٥٦	٥٤	٦٧	٧٣	٦٥	٦٣	٧٢	٦٥

المصدر : وزارة السياحة ، السياحة فى أرقام .

والمطلوب : قياس التغيرات الموسمية .

الحـــــل

الجدول الإحصائي اللازم :

السنوات والشهور	س	ص	س ص	س٢	صَ =٦٧–٢٧,٠س	(ص / صَ) ×١٠٠	دليل الموسم	التغيرات الموسمية (صَ × دليل الموسم / ١٠٠)
يناير ٩٦	٠	٦٨	٠	٠	٦٧	١٠١,٥	٨١,١	٥٤,٣
٢	١	٦٤	٦٤	١	٦٦,٧٣	٩٥,٥	٩٠,١	٦٠,١
٣	٢	٦٩	١٣٨	٤	٦٦,٤٦	١٠٣,٨	٩١,١	٦٠,١
٤	٣	٦٨	٢٠٤	٩	٦٦,١٩	١٠٢,٧	٨٨,٧	٥٨,٧
٥	٤	٦٠	٢٤٠	١٦	٦٥,٩٢	٩١	٩٧,٩	٦٤,٥
٦	٥	٥١	٢٥٥	٢٥	٦٥,٦٥	٧٧,٧	٩٠,٠	٥٩,١



تابع الجدول

٧	٦	٤٦	٢٧٦	٣٦	٦٥,٨٣	٦٩,٩	١٠٠	٦٥,٨
٨	٧	٧٨	٥٤٦	٤٩	٦٥,١١	١١٩,٨	١٢٣,٥	٨٠,٤
٩	٨	٧٠	٥٦٠	٦٤	٦٤,٤٨	١٠٨,٦	١١٠,٦	٧١,١
١٠	٩	٧٩	٥١١	٨١	٦٤,٥٧	١٢٢,٣	١١٧,٧	٧٦,٠
١١	١٠	٦٨	٦٨٠	١٠٠	٦٤,٣٠	١٠٥,٨	١١٦,٦	٧٥,٠
١٢	١١	٦٤	٧٠٤	١٢١	٦٤,٠٣	١٠٠,٠	٩٣,٥	٦٠,١
١٩٩٧ ١	١٢	٦٤	٧٦٨	١٤٤	٦٣,٧٦	١٠٠,٤	٨١,١	٥١,٧
٢	١٣	٧٢	٩٣٦	١٦٩	٦٣,٤٩	١١٣,٤	٩٠,١	٥٧,٢
٣	١٤	٦٦	٩٢٤	١٩٦	٦٣,٢٢	١٠٤,٤	٩١,١	٥٧,٦
٤	١٥	٦٦	٩٩٠	٢٢٥	٦٢,٩٥	١٠٤,٨	٨٨,٧	٥٥,٨
٥	١٦	٦٨	١٠٨٨	٢٦٥	٦٢,٦٨	١٠٨,٥	٩٧,٩	٦١,٤
٦	١٧	٦٣	١٠٧١	٢٨٩	٦٢,٤١	١٠٠,٩	٩٠,٠	٥٦,٢
٧	١٨	٧٢	١٢٩٦	٣٢٤	٦٢,١٤	١١٥,٩	١٠٠,٠	٦٢,١
٨	١٩	٧٨	١٤٨٢	٣٦١	٦١,٨٧	١٢٦,١	١٢٣,٥	٧٦,٤
٩	٢٠	٦٨	١٣٦٠	٤٠٠	٦١,٦٠	١١٠,٤	١١٠,٦	٦٧,٨
١٠	٢١	٧٥	١٥٧٥	٤٤١	٦١,٣٣	١٢٢,٣	١١٧,٧	٧٢,٢
١١	٢٢	٧٣	١٦٠٦	٤٨٤	٦١,٠٣	١١٩,٦	١١٦,٦	٧١,٢
١٢	٢٣	٤١	٩٤٣	٥٢٩	٦٠,٧٩	٦٧,٧	٩٣,٥	٥٦,٨
١٩٩٨ ١	٢٤	٢٥	٦٠٠	٥٧٦	٦٠,٥٢	٤١,٣	٨١,١	٤٩,١
٢	٢٥	٣٧	٩٢٥	٦٢٥	٦٠,٢٥	٦١,٤	٩٠,١	٥٤,٣
٣	٢٦	٣٩	١٠١٤	٦٧٦	٥٩,٩٨	٦٥,٠	٩١,١	٥٤,٦
٤	٢٧	٣٥	٩٤٥	٧٢٩	٥٩,٧١	٥٨,٦	٨٨,٧	٥٣,٠
٥	٢٨	٥٦	١٥٦٨	٧٨٤	٥٩,٤٤	٩٤,٢	٩٧,٩	٥٨,٢
٦	٢٩	٥٤	١٥٦٦	٨٤١	٥٩,١٧	٩١,٣	٩٠,٠	٥٣,٢



تابع الجدول

٧	٣٠	٦٧	٢٠١٠	٩٠٠	٥٨.٩٠	١١٣.٨	١٠٠.٠	٥٨.٩
٨	٣١	٧٣	٢٢٦٣	٩٦١	٥٨.٦٣	١٢٤.٥	١٢٣.٥	٧٧.٨
٩	٣٢	٦٥	٢٠٨٠	١٠٢٤	٥٨.٣٦	١١١.٤	١١٠.١	٦٤.٣
١٠	٣٣	٦٣	٢٠٧٩	١٠٨٩	٥٨.٠٩	١٠٨.٥	١١٧.٧	٦٨.٤
١١	٣٤	٧٢	٢٤٤٨	١١٥٦	٥٧.٨٢	١٢٤.٥	١١٦.٦	٧١.٢
١٢	٣٥	٦٥	٢٢٧٥	١٢٢٥	٥٧.٥٥	١١٢.٩	٩٣.٥	٥٦.٨
المجموع	٦٣٠	٢٢٤٢	٣٨١٩٠	١٤٩١٩	٢٢٤٢	٣٦٠٠	/	/

التنبؤ بخط الاتجاه العام لعام ١٩٩٩ :

الجدول الإحصائي اللازم :

السنوات والشهور	س	ص = ٦٧ _ ٠,٢٧ س	
١ ١٩٩٩	٣٦	٥٧,٢٨	وهذا ما يوضحه امتداد خط الاتجاه العام لعام ١٩٩٩
٢	٣٧	٥٧,٠١	
٣	٣٨	٥٦,٧٤	
٤	٣٩	٥٦,٤٧	
٥	٤٠	٥٦,٢٠	
٦	٤١	٥٥,٩٣	
٧	٤٢	٥٥,٦٦	
٨	٤٣	٥٥,٣٩	
٩	٤٤	٥٥,١٢	
١٠	٤٥	٥٤,٨٥	
١١	٤٦	٥٤,٥٨	
١٢	٤٧	٥٤,٣١	

نسبة الاختلال الفني

المنحنى التاريخي للظاهرة

نسبة الاختلال الفني

خط الاتجاه العام

التغيرات الموسمية

السنوات والشهور

ملاحظات على جدول قياس التغيرات الموسمية :

(١)أن معادلة الاتجاه العام وهي $\hat{\text{ص}}$ = ٦٧ - ٠,٢٧ س تم الحصـــول

عليها من بيانات نفس الجدول حيث :

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{\text{مجـ س . مجـ ص}}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{\text{٣٨١٩٠} - \frac{\text{٦٣٠} \times \text{٢٢٤٢}}{\text{٣٦}}}{\text{١٤٩١٩} - \frac{\text{٦٣٠}^{٢}}{\text{٣٦}}}$$

$$= -\text{٠,٢٧}$$

$$\text{أ} = \frac{(\text{مجـ ص})}{\text{ن}} - \text{ب} \times \frac{(\text{مجـ س})}{\text{ن}} = \text{٦٢,٢٨} - \text{٤,٦٩٧} = \text{٦٧}$$

(٢) $\frac{\text{ص}}{\hat{\text{ص}}}$ × ١٠٠ هو الإجراء اللازم لعـــزل التغـــيرات الاتجاهيـــة

لتصبح التغيرات الباقية هي الموسمية والدورية والعرضية حيث :

$$\text{ى} = \text{ج} \times \text{م} \times \text{د} \times \text{ع}$$



∴ م × د × ع = ى / ج أى ص / صَ والضرب فى مائة بهدف

إيجاد قيم التغيرات الباقية كنسب مئوية .

(٣)دليل الموسم هو الإجراء اللازم لإيجاد قيم التغيرات الموسمية ، ويتم

حساب دليل الموسم طبقا للجدول الإحصائي التالى :

الموسم / السنة	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	المجموع	دليل الموسم
١	١٠١,٥	١٠٠,٤	٤١,٣	٢٤٣,٢	٨١,١
٢	٩٥,٥	١١٣,٤	٦١,٤	٢٧٠,٣	٩٠,١
٣	١٠٣,٨	١٠٤,٤	٦٥,٠	٢٧٣,٢	٩١,١
٤	١٠٢,٧	١٠٤,٨	٥٨,٦	٢٦٦,١	٨٨,٧
٥	٩١,٠	١٠٨,٥	٩٤,٢	٢٩٣,٧	٩٧,٩
٦	٧٧,٧	١٠٠,٩	٩١,٣	٢٦٩,٩	٩٠,٠
٧	٦٩,٩	١١٥,٩	١١٣,٨	٢٩٩,٦	١٠٠,٠
٨	١١٩,٨	١٢٦,١	١٢٤,٥	٣٧٠,٤	١٢٣,٥
٩	١٠٨,٦	١١٠,٤	١١١,٤	٣٣٠,٤	١١٠,١
١٠	١٢٢,٣	١٢٢,٣	١٠٨,٥	٣٥٣,١	١١٧.٧
١١	١٠٥,٨	١١٩,٦	١٢٤,٥	٣٤٩,٩	١١٦,٦
١٢	١٠٠,٠	٦٧,٧	١١٢,٩	٢٨٠,٦	٩٣,٥
المجموع	/	/	/	٣٦٠٠	١٢٠٠



ودليل الموسم هو متوسط النسب المئوية لمجموع مواسم السنوات المختلفة ، ويتأتى دليل الموسم إذا تحقق أن ٣٦٠٠ ÷ ٣٦ = ١٠٠ ، أو ١٢٠٠ ÷ ١٢ = ١٠٠ وعلى ذلك فالعمود الأخير دليل الموسم خلال الفترة الزمنية (٩٦ – ١٩٩٨) .

الباب الخامس

الأرقام القياسية

الباب الخامس

الأرقام القياسية

يشتمل هذا الباب على النقاط التالية :

تمهيـــــد :

- تعريف الرقم القياسي .
- استخدامات الأرقام القياسية .
- صيغ (طرق تركيب) الأرقام القياسية ك
  - في حالة متغير واحد .
  - في حالة عدة متغيرات .
- مشاكل تركيب الأرقام القياسية .
- بعض الأرقام القياسية الشائعة .
- تطبيقـــــــات .



التمهيـــد :

عند دراسة تغير الظاهرة مع الزمن أو تغيرها من مكان لأخـــر أو عند مقارنة تغيرات مجموعة من الظواهر الأمر يتطلب ضرورة اســتخدام التغير النسبي دون التغير المطلق للأسباب التالية :

١-أن التغير النسبي أجدى كثيرا من التغير المطلق .

٢- أن التغير النسبي تعبير أدق عن مدى التغير فى الظاهرة .

٣-عند المقارنة بين تغيرات ظواهر مختلفة فلابد مـــن الغـــاء وحـــدات القياس وهذا لا يتأتى إلا باستخدام التغير النسبي .

مثـــــــال

إذا ارتفع سعر كوب الشاي من جنيه إلى جنيهان وإذا ارتفع سعر تذكرة السفر من ١٠٠٠ جنيه إلى ١٠٥٠ جنيه **فالمطلوب** :

١-احسب التغير المطلق والتغير النسبي فى ظاهرة ارتفاع الأسعار هذه .

٢-قارن بين التغير المطلق والتغير النسبي فى تطور السعر هـــذا.



٣-بين هل التغير المطلق أم التغير النسبي أجدى فى المقارن بين ارتفـاع السعرين .

الحـــــل

١-التغير المطلق فى سعر الشاي Δ س = $\overline{\text{س}}$ − س

= ٢ − ١ = ١ جنيه

التغير المطلق فى سعر التذكرة Δ س = ١٠٥٠ − ١٠٠٠ = ٥٠ جنيه

التغير النسبي المئوي = $\frac{\text{بج}\ \overline{\text{س}}}{\text{س}} \times ١٠٠$

التغير النسبي المئوي لسعر الشاي = $\frac{٢}{١} \times ١٠٠$ = ٢٠٠%

، التغير النسبي المئوي لسعر التذكرة = $\frac{١٠٥٠}{١٠٠٠} \times$ ١٠٥%

٢-التغير المطلق فى سعر كوب الشاي< التغير المطلق فى سعر التذكـرة

التغير النسبي فى سعر كوب الشاي (١٠٠%) > التغير النسبي فـــى سعر التذكرة (٥%) .

٣-يعتبر التغير النسبي هو الموضح للمقارنة الحقيقية بين ارتفاع السعرين .

تعريف الرقم القياسي : Index Number

هو مقياس إحصائي يستخدم لمقارنة الظاهرة فى وضعين مختلفين أحدهما يسمي بوضع المقارنة والآخر يسمى بوضع الأساس وذلك بهدف قياس تغير الظاهرة سواء بالزيادة أو النقصان .

ملاحظات على التعريف :

١-أن الظاهرة قد تكون لمتغير واحد كسعر سلعة ما أو الكمية المنتجة من سلعة ما أو الكمية المستهلكة من سلعة ما ... وقد تكون لعدة متغيرات كأسعار مجموعة من السلع أو الكميات.

٢-أن عملية المقارنة تتم فى صورة نسبة مئوية وذلك بقسمة وضع المقارنة على وضع الأساس مضروبا فى ١٠٠

٣-أن وضع المقارنة والأساس قد يكون وفقا للزمن فيقال سنة



المقارنة وسنة الأساس ، وقد يكون وفقا للمكان فيقال مكـــان المقارنة ومكان الأساس ، وسوف يقتصر فى هـــذا الكتــاب على دراسة الأرقام القياسية وفقا للزمن فقط حيث ما يطبـــق وفقا للزمن يمكن تطبيقه وفقا للمكان .

استخدامات الأرقام القياسية :

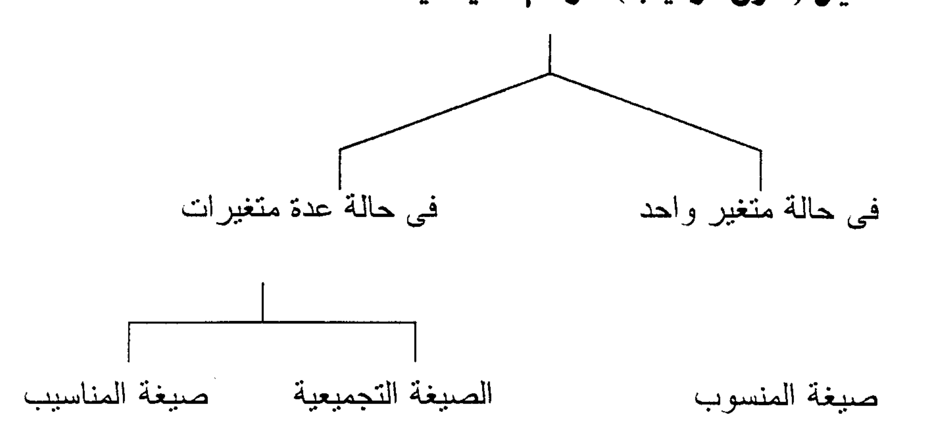
١-تستخدم الأرقام القياسية فى التعرف على الأحوال الاقتصاديـــة وذلك بمقارنة أرقام الأسعار بغيرها من الأرقام ومنـــها أرقـــام الإنتاج .

٢-التعرف على الاتجاه العام والتغيرات الموسمية لسلاسل الأرقـلم القياسية بعد تركيبها على مر السنين لظواهر الإنتاج والمبيعـلت والمخزون والصادرات والواردات لعديد من السلع الهامة .

٣-إمكان التنبؤ بالظاهرة وذلك باستخدام الأرقام القياسية الخاصـــة بها، وإن كان من الواجب اتخاذ الحيطة عند استخدامها فى هـذا الفرض ومراعاة بعض النواحى الإحصائية الهامة المتعلقة بها



صيغ (طرق تركيب) الأرقام القياسية :



<u>أولا : صيغة المنسوب :</u>

أمثـــــلة

مثال١ : قارن بين سعر اللحوم فى مصر عام ٢٠٠٠ بسعرها عام ١٩٠٠ على اعتبار أن عام ١٩٠٠ وضع أساس إذا علمت أن السلعة عام ٢٠٠٠ يساوي ٣٠ جنيه وفى عام ١٩٠٠ يساوي ١٥ جنيه .

الحـــــل

$$\text{الرقم القياسى كمنسوب للسعر} = \frac{\text{السعر فى سنة المقارنة}}{\text{السعر فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{ع_١}{ع_٠} \times ١٠٠$$



$$= \frac{٣٠}{١٥} \times ١٠٠ = ٢٠٠\%$$

وهذا يعنى أن أسعار اللحوم فى مصر عام ٢٠٠٠ زادت بنسبة ١٠٠%

عن سعرها فى عام ١٩٠٠ .

مثال٢ : إذا كان سعر الكمبيوتر عام ١٩٩٥ يساوي ٣٠٠٠ جنيه وفى

عام ١٩٩٨ يساوى ٢٨٠٠ جنيه فقارن بين السعرين على اعتبار

عام ١٩٩٥ = ١٠٠ .

الحـــل

$$م = \frac{ع_1}{ع_0} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٠٠٠}{٢٨٠٠} \times ١٠٠ = ٩٣,٣٠\%$$

وهذا يعنى أن سعر الكمبيوتر عام ١٩٩٨ ($ع_1$) نقص بمقدار

٦,٧% عن سعره عام ١٩٩٥ ($ع_0$) .

ملحوظة :

التعبير بأن عام ١٩٩٥ = ١٠٠ يقصد به أن عام ١٩٩٥ سنة الأساس .

مثال٣ : إذا توفرت المعلومات التالية عن سلعة ما :

$ع_0$=١٨٠ جنيه ، $ع_1$=١٥٠ جنيه ، $ك_0$=٥٠٠٠ وحدة ، $ك_1$=٦٠٠٠ وحدة

المطلوب : ١- أوجد منسوب السعر .

٢- أوجد منسوب الكمية .

٣- أوجد منسوب القيمة .

الحـــــل

$$\text{منسوب السعر} = \frac{ع_1}{ع_0} \times ١٠٠ = \frac{١٥٠}{١٨٠} \times ١٠٠ = ٨٣,٣\%$$

$$\text{منسوب الكميه} = \frac{ك_1}{ك_0} \times ١٠٠ = \frac{٦٠٠٠}{٥٠٠٠} \times ١٠٠ = ١٢٠\%$$

$$\text{منسوب القيمة} = \frac{ع_1 \times ك_1}{ع_0 \times ك_0} \times ١٠٠ = \frac{١٥٠ \times ٦٠٠٠}{١٨٠ \times ٥٠٠٠} \times ١٠٠ = ١٠٠\%$$

تفسير الناتج :

- أن منسوب السعر نقص بمقدار ١٦,٧% .
- أن منسوب الكمية زاد بمقدار ٢٠% .
- أن منسوب القيمة لم يسجل أي تغير .



ويلاحظ أن استخدام منسوب السعر فى المقارنة لا يمكننا إلا من وصف وجه واحد للظاهرة كسعر اللحوم فقط ، لكن إذا أردنا مقارنة مجموعة أسعار السلع الغذائية مثلا فى وضعين مختلفين فإننا لابد من استخدام متوسط مجموع الأسعار ، لذلك يستلزم الأمر حساب رقم قياسي يعبر عن التغير المتوسط للظاهرة ككل وليس لوجه منها فقط ، وهذا هو شأن علم الإحصاء حيث يتعامل مع الظواهر كبيرة العدد Law of large Number

ثانيا : الصيغة التجميعية :

للرقم القياسي التجميعي نوعين هما البسيط والمرجح .

أ – الرقم القياسي التجميعي البسيط :

مثال : فيما يلى بيان بأسعار عدة مشروبات بأحد الفنادق فى عامي ١٩٩٥ ، ٢٠٠٠ .

المشروبات / السنة	أ	ب	جـ	ء
١٩٩٥	٣	٤	٥	٤,٥
٢٠٠٠	٥.٥	٦	٧	٦

والمطلوب : احسب الرقم القياسي التجميعي البسيط للسعر باعتبار عام ١٩٩٥ = ١٠٠ .



الحـــل

الرقم القياسي التجميعي البسيط = $\frac{\text{مجموع اسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}} \times ١٠٠$

$$ر = \frac{مجـ ع_1}{مجـ ع_0} \times ١٠٠$$

وهكذا بالنسبة للكميات والقيم .

الجدول الإحصائي اللازم :

السلعة	ع. (١٩٩٥)	ع. (٢٠٠٠)
أ	٣	٥.٥
ب	٤	٦
جـ	٥	٧
ء	٤,٥	٦
المجموع	١٦.٥	٢٤,٥

$$\therefore ر = \frac{٢٤,٥}{١٦,٥} \times ١٠٠ = ١٤٨,٥\%$$

وهذا يعنى أن الأسعار فى عام ٢٠٠٠ قد زادت بنسبة ٤٨,٥% عما كانت عليه عام ١٩٩٥ .



ملاحظات :

أ – أن تركيب الرقم القياسي التجميعي البسيط يقوم على مقارنة متوسط أسعار سنة المقارنة بمتوسط أسعار سنة الأساس أي :

$$ر = \frac{\frac{مج ع_1}{ن}}{\frac{مج ع_.}{ن}} \times ١٠٠ = \frac{مج ع_1}{مج ع_.} \times ١٠٠$$

$$= \frac{\frac{٢٤,٥}{٤}}{\frac{١٦,٥}{٤}} \times ١٠٠ = ١٤٨,٥\%$$

ب– مـن الممكـن اسـتخدام الوسـط الهندسي بدلا من الوسط الحسابي المستخدم فى الملحوظة السابقة كما يلي :

السلعة	منسوب السعر	لو س
أ	١٤٠	٢,١٤٦١
ب	١٥٠	٢,١٧٦١
جـ	١٣٣,٣	٢,١٢٤٨
ء	١٨٣,٣	٢,٢٦٣٢
المجموع		٨,٧١٠٣



$$\text{لو هـ} = \frac{\text{مجـ لو س}}{\text{ن}} = \frac{٨,٧١٠٣}{٤} = ٢,١٧٧٦$$

ومنها هـ = ١٥٠,٥%

جـ- نظرا لكون تركيب الرقم القياسى التجميعي البسيط يقوم على استخدام المتوسط (متوسط مجموع أسعار سنة المقارنة ومتوسط مجموع أسعار سنة الأساس) ونظرا لكون المتوسط هذا قد أعطى مجميع المفردات الداخلة فى حسابه أوزان متساوية رغم اختلاف الأهمية النسبية لكل مفردة فقد تكون كميات المشروب (أ) أكبر من كميات المشروب (جـ) أو ....، لذلك فإن القم القياسى الناتج رقم مضلل ، ولمعالجة هذا التضليل كان لابد من استخدام الترجيح فى تركيب القم القياسي .

ب- الرقم القياسي التجميعى المرجح :

يعنى الترجيح أن تعطى السلع وزن يتناسب مع أهميتها النسبية ،



وأوزان الترجيح الشائعة هي الكميات المتداولة من السلعة سواء كميات سنة المقارنة أو كميات سنة الأساس. [1]

(١) الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير) :

$$ر = \frac{مجـ\ ع_١ . ك_٠}{مجـ\ ع_٠ . ك_٠} \times ١٠٠$$

مثـــــال

من بيانات المثال السابق أوجد الرقم القياسي التجميعي المرجـــح بكميــات سنة الأساس إذا علمت أن كميات سنة الأساس هي ٠,٥ ، ٣,٥ ، ٥ ، ٣

الحـــــل

الجدول الإحصائي اللازم :

السلعة	ع. ١٩٩٥	ع١ ٢٠٠٠	ك. ١٩٩٥	ع. ك. [2]	ع. ك. [3]
أ	٣	٥.٥	٠.٦	٢.٧٥	١.٥
ب	٤	٦	٣.٥	٢١,٠٠	١٤,٠
جـ	٥	٧	٥	٣٥,٠٠	٢٥,٠
ء	٤,٥	٦	٣	١٨,٠٠	١٣,٥
المجموع	١٦,٥	٢٤,٥	/	٧٦,٧٥	٥٤,٠

[1] يعتمد تركيب الرقم القياسي للأسعار يجب ترجيحه بالكميات ، وعند تركيب الرقم القياسي للأجور يجب ترجيحه بعدد العمال في كل فئه .
[2] القيمة الاعتبارية للسلعة في سنة المقارنة .
[3] القيمة الاعتبارية للسلعة في سنة الأساس .



$$م = \frac{٧٦,٧٥}{٥٤,٠٠} \times ١٠٠ = ١٤٢,١$$

وهذا أن الأسعار قد ارتفعت بنسبة ٤٢,١% فى عام ٢٠٠٠ عما كانت عليه عام ١٩٩٥ وذلك بفرض ثبات الكميات المتداولة من السلع وفقا لكميات سنة الأساس .

(٢) الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات سنة المقارنة (باش) :

$$م = \frac{مج (ع_١ . ك_١)}{مج (ع_. . ك_.)} \times ١٠٠$$

مثـــــال

من بيانات المثال السابق أوجد الرقم القياسي (باش) إذا علمت أن كميـــات سنة المقارنة هي ١,٥ ، ٥ ، ٧ ، ٣ .

الحــــل

الجدول الإحصائي اللازم :

السلعة	ع. ١٩٩٥	ع١ ٢٠٠٠	ك١ ١٩٩٥	ع١ ك١	ع. ك١
أ	٣	٥.٥	٠,٦	٨,٢٥	٤,٥
ب	٤	٦	٣,٥	٣٠,٠٠	٢٠,٠
جـ	٥	٧	٥	٤٩,٠٠	٣٥,٠
ء	٤,٥	٦	٣	١٨,٠٠	١٣,٥
المجموع	١٦,٥	٢٤,٥	/	١٠٥,٢٥	٧٣,٠



$$\therefore \; س = \frac{١٠٥,٢٥}{٧٣} \times ١٠٠ = ١٤٤,٢\%$$

وهذا يعنى أن الأسعار قد ارتفعت بنسبة ٤٤,٢% فى عـام ٢٠٠٠ عما كانت عليه عام ١٩٩٥ وذلك الفرض ثبات الكميات المتداولة مـن السلع وفقا لكميات سنة المقارنة (الكميات الفعلية) .

(٣) الرقم القياسي (فيشر) :

هو رقم يعتمد فى تركيبه على رقمى لاسبير وباش أي هو الرقم القياسي المرجح بكميات سنة المقارنة والرقم القياسي المرجح بكميات سنة الأساس ، ويسمي بالرقم القياسي الأمثل لأنه يتغلب على ما قـد يعتري الرقمين السابقين من مآخذ ناتجه عن التطرف فى تأثير أوزان الترجيح .

$$\therefore \; س \text{ (باش أو الأمثل)} = \sqrt{\frac{مج ع_١ . ك_٠}{مج ع_٠ . ك_٠} \times \frac{مج ع_١ . ك_١}{مج ع_٠ . ك_١}} \times ١٠٠$$

مثـــال

من بيانات المثال السابق أوجد الرقم القياسي الأمثل .



الحـــــل

ر (الأمثل) = $\sqrt{١٤٢,١ \times ١٤٤,٢}$ = ١٤٣,١%

وواضح أن رقم فيشر يتوسط رقم لاسبير ورقم باش حيث أنه هو الوســـط الهندسي لرقمى لاسبير وباش ، كما يتضح أنه يحد من أثر التطرف فـــى الرقمين .

وعلى ما سبق يتضح أنه قد تم إيجاد معظم الـــتراكيب المختلفـــة للأرقام القياسية (للأسعار) ، ألا أنه بنفس التراكيب يمكـــن إيجـــاد الرقـــم القياسي للكميات ، أو الرقم القياسي لتطور الإنتـــاج فـــى قطـــاع مـــا أو لمجموعة من القطاعات الإنتاجية ، أو الرقم القياسي لتطور العمالـــة فـــى قطاع ما أو لمجموعة من القطاعات الإنتاجيـــة أو الخدميـــة ، باختصـــار يمكن استخدام الرقم القياسي فى دراسة تطور الظاهرة أيـــا كـــان مجـــال الدراسة ، وما اقتصارنا فيما سبق على الرقم القياسي للأسعار إلا كوســـيلة لعرض تراكيب الرقم القياسي .

خصائص الرقم القياسي الجيد :

بداية لا يجوز القول بأن تركيبة ما للرقم القياسي هى الأفضل من تركيبة آخرى حيث يتوقف ذلك على مجال الدراسة والهدف منها فمثلا :

- إذا أردنا دراسة التغير فى نفقة المعيشة بهدف معرفة ما هي تكلفة المعيشة اللازمة للمحافظة على مستوى استهلاكى معين، فإنه يتم الترجيح بكميات سنة الأساس حيث المطلوب هو المحافظة على نفس مستوى المعيشة .

- وإذا أردنا دراسة ما طرأ به نفقة المعيشة الفعلية ، فإنه يتم الترجيح بكميات سنة المقارنة .

وفوق ذلك فإن للرقم القياسي الجيد خصائص منها :

(١) الانعكاس فى الزمن (البديل الزمنى) :

وهو أن نستبدل رموز سنة المقارنة برموز سنة الأساس والعكس

البديل الزمني لرقم لاسبير $= \frac{\text{مج ع. . ك}_1}{\text{مج ع}_1\text{ . ك}_1}$

البديل الزمني لرقـــم باش = $\frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ . ك}_0}{\text{مجـ ع}_1 \text{ . ك}_0}$

البديل الزمني لرقم فيشر = $\sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ . ك}_1}{\text{مجـ ع}_1 \text{ . ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ . ك}_0}{\text{مجـ ع}_1 \text{ . ك}_0}}$

والقاعدة إذا كان الرقم القياسي × بديله الزمنى = ١ فإن الرقـــم القياســـي جيد ، ويلاحظ أن رقم لاسبير و رقم بـــاش لـــم يجتـــازا هـــذا الاختبـــار (القاعدة) ، أما رقم فيشر هو الذى يجتاز هذا الاختبار فمثلا بالنسبة لرقـــم لاسبير :

$$\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ . ك}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ . ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_0 \text{ . ك}_1}{\text{مجـ ع}_1 \text{ . ك}_1} \neq 1$$

(٢) الانعكاس فى المعامل :

إذا كان الرقم القياسي الأصلى هو الرقم القياسي للأسعار ، وأنـــه إذا تم استبدال السعر بالكمية والكمية بالسعر ، فإن النـــــاتج هـــو البديـــل المعاملى للرقم القياسي الأصلي .

الرقم القياسي = $\frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0} \times 100$ بديله المعاملى = $\frac{\text{مجـ ك}_1}{\text{مجـ ك}_0} \times 100$



∴الرقم القياسي $= \frac{\text{مج ع}_١ \text{ . ك}_٠}{\text{مج ع}_٠ \text{ . ك}_٠} \times ١٠٠ \times$ بديله المعاملي $= \frac{\text{مج ك}_١ \text{ . ع}_٠}{\text{مج ك}_٠ \text{ . ع}_٠} \times ١٠٠$

، وهكذا لباقي الأرقام القياسية .

والقاعدة إذا كان الرقم القياسي×بديله المعاملي=منسوب القيمة $\frac{\text{مج ع}_١ \text{ . ك}_١}{\text{مج ع}_٠ \text{ . ك}_٠}$

فإن الرقم القياسي هذا رقم جيد .

ويلاحظ أن رقم لاسبير وباش لم يجتازا هذا الاختبار (القاعدة) بينما رقـــم فيشر هو الذى يجتاز حيث :

$$\frac{\text{مج ع}_١}{\text{مج ع}_٠} \times \frac{\text{مج ك}_١}{\text{مج ك}_٠} \neq \text{منسوب القيمة}$$

$$، \quad \frac{\text{مج ع}_١ \text{ . ك}_٠}{\text{مج ع}_٠ \text{ . ك}_٠} \times \frac{\text{مج ك}_١ \text{ . ع}_٠}{\text{مج ك}_٠ \text{ . ع}_٠} \neq \text{منسوب القيمة}$$

$$، \quad \frac{\text{مج ع}_١ \text{ . ك}_١}{\text{مج ع}_٠ \text{ . ك}_١} \times \frac{\text{مج ك}_١ \text{ . ع}_١}{\text{مج ك}_٠ \text{ . ع}_١} \neq \text{منسوب القيمة}$$

$$\sqrt{\frac{\text{مج ع}_١ \text{ . ك}_٠}{\text{مج ع}_٠ \text{ . ك}_٠} \times \frac{\text{مج ع}_١ \text{ . ك}_١}{\text{مج ع}_٠ \text{ . ك}_١}} \times \sqrt{\frac{\text{مج ك}_١ \text{ . ع}_٠}{\text{مج ك}_٠ \text{ . ع}_٠} \times \frac{\text{مج ك}_١ \text{ . ع}_١}{\text{مج ك}_١ \text{ . ع}_١}} = \text{منسوب}$$



القيمة أي أن الرقم القياسي فيشر هو الوحيد الذى يجتاز اختبار الإنعكاس في المعامل .

مشاكل تركيب الأرقام القياسية :

١- المعاينة (اختيار السلع) :

عند تركيب الأرقام القياسية يتم استخدام الطريقة العمدية في اختيار السلع (أو المفردات) الداخلة في التركيب ، وللعينة العمدية مشاكلها الإحصائية التى يجب مراعاتها ، فعند تركيب الرقم القياسي للأسعار مثلا يتم أخذ عدد من السلع تمثل السلع المتداولة في السوق .

٢- اختيار فترة الأساس :

أن اختيار فترة الأساس بشكل خاطئ يؤدى إلى الحصول على مقاييس (أرقام قياسية) مضلله أو عديمة المعنى ، لذلك يجب أن تكون فترة الأساس خالية من الهزات والتقلبات الاقتصادية والاجتماعية والمناخية ، لذلك إذا تم اختيار إحدى سنوات الكساد كسنة أساس فإن الرقم القياسي الناتج يكون كبير بشكل مصطنع ولا يعبر عن التغيرات الفعلية



للظاهرة ، والعكس إذا تم اختيار إحدى سنوات التضخم كسنة أساس فـإن الرقم القياسي الناتج يكون صغير بشكل مصطنـع . غـير معـبر عـن الظاهرة- والخلاصة أن قيمة فترة الأساس تكون قيمة عادية لا مرتفعـة ولا منخفضة . كما يجب أن تكون سنة الأساس قريبة من سنة المقارنة إذا وجود فترة طويلة بينهما يؤثر على دلالة الرقم القياسي .

٣- اختيار الأوزان :

أن تعطى الأهمية النسبية للمتغيرات الداخلة فـى تركيـب الرقـم القياسي وفقا للنظرية الاقتصادية .

٤- اختبار المتوسط :

يعتبر المتوسط الحسابي أكثر المتوسطات استخداما فـى تركيـب الأرقام القياسية ويندر استخدام الوسيط والمنوال .

الأرقام القياسية الشائعة :

تحرص الجهات المسئولة فى جميع دول العـالم علـى حسـاب الأرقام القياسية للمؤشرات الاقتصادية والاجتماعيـة ومـن أمثلـة هـذه الأرقام:



١-الرقم القياسي لنفقة المعيشة (أسعار المستهلكين) .

٢-الرقم القياسي لأسعار الجملة .

٣-الرقم القياسي للأجور .

٤-الرقم القياسي للإنتاج .

٥-الرقم القياسي لتنفيذ الخطة .



تطبيقـــــــات :

حـــالـــه (١)

الجدول التالي يبين الدخل والعمالة فى قطاعات الإنتاج المختلفـــة عـــامى ٢٠٠٠ ، ٢٠٠٣ (أرقام فرضية) .

(الدخل بالمليون جنيه ، والعمالة بالألف عامل)

قطاع الإنتاج	٢٠٠٠		٢٠٠٣	
	الدخل	العمالة	الدخل	العمالة
زراعة	٩٣٣	٤١٣٤	١٢٨٠	٤٢١٢
صناعة	٥٨٩	١٠٨٧	٨٤٤	١١٥٠
كهرباء	٤٦	٣٥	٤٨	٣٨
تشييد	١٢١	٣٤٨	١٣٥	٣١٥
خدمات	١٢٦٧	٣١٠٦	١٨٠٤	٣٣١٥
الإجمالى	٢٩٥٦	٨٧١٠	٤١١١	٩٠٣٠

والمطلوب :

١-احسب إنتاجية العامل فى كل قطاع .

٢-احسب الرقم القياسي للإنتاجية فى عام ٢٠٠٣ باعتبار عـــام ٢٠٠٠= ١٠٠ ، وباعتبار هيكل العمالة فى سنة المقارنة كأوزان للترجيح .



الحل

$$\text{إنتاجية العمال فى القطاع} = \frac{\text{الدخل الناتج من القطاع}}{\text{عدد العمال فى القطاع}}$$

، الرقم القياسي للإنتاجية $= \frac{\text{مج ع}_1\text{ك}_1}{\text{مج ع. ك}_1}$

حيث $ع_1$ هي إنتاجية العامل في سنة المقارنة ، ع. هي إنتاجية العامل فى سنة الأساس ، $ك_1$ هي هيكل العمالة في سنة المقارنة .

الجدول الإحصائي اللازم :

القطاع	ع.	$ع_1$	$ك_1$	$ع. ك_1$	$ع_1 ك_1$
زراعة	٢٢٥,٧	٣٠٣,٩	٤٢١٢	٩٥٠٦٤٨,٤	١٢٨٠٠٢٦,٨
صناعة	٥٤١,٩	٧٣٣,٩	١١٥٠	٦٢٣١٨٥,٠	٨٤٣٩٨٥,٠
كهرباء	١٣١٤,٣	١٢٦٣,٢	٣٨	٤٩٩٤٣,٤	٤٦٩٧٥,٦
تشييد	٣٤٧,٧	٤٢٨,٦	٣١٥	١٠٩٥٢٥,٥	١٣٥٠٠٩,٠
خدمات	٤٠٧,٩	٥٤٤,٢	٣٣١٥	١٣٥٢١٨٨,٥	١٨٠٤٠٢٣,٠
الإجمالي	٢٨٣٧,٥	٣٣٧٣,٨		٣٠٨٥٤٩٠,٨	٤١١٠٠١٩,٤

الرقم القياسي للإنتاجية $= \frac{٤١١٠٠١٩,٤}{٣٠٨٥٤٩٠,٨} \times ١٠٠ = ١٣٣,٢١\%$



حـــالـــــــه (٢)

الجدول التالي يبين أهم مواد البناء ونسبتها فى إجمالي تكاليف البناء وكـــذا أسعارها فى عامي ١٩٩٥ ، ٢٠٠٠ (الأرقام فرضية) .

أهم مواد البناء ونسبتها فى اجمالى تكاليف البناء		أسعار عام ١٩٩٥	أسعار عام ٢٠٠٠
المادة	ك %	ع٠	ع١
الأسمنت	١٠	١٥ جنيه للطن	٢٠
الحديد	١٠	١٠٠ جنيه للطن	١٥٠
الخشب	١٠	٤٥ جنيه للمتر	٩٠
الطوب	٥	٦ جنيه (الألف طوبه)	٩
العمالة	١٥	٠,٩ جنيه متوسط أجر العامل	١,٨
الجملة	٥٠	/	/

والمطلوب :

إنشاء الرقم القياسي لتكاليف البناء فى عام ٢٠٠٠باعتبار عام١٩٩٥=١٠٠

ك	ع٠	ع١	(ع١ / ع٠) × ١٠٠	(ع١ / ع٠) × ك
١٠	١٥	٢٠	١٣٣,٣	١٣
١٠	١٠٠	١٥٠	١٥٠	١٥
١٠	٤٥	٩٠	٢٠٠	٢٠
٥	٦	٩	١٥٠	٧,٥
١٥	٠,٩	١.١	٢٠٠	٣٠
٥٠	/	/	٨٣٣,٣	٨٥,٥



وعلى ذلك فالرقم القياسي لتكاليف البناء هو الرقم القياسي للمناسيب المرجح .

$$\text{الرقم القياسي لتكاليف البناء} = \frac{\text{مجـ } \frac{ع_١}{ع_٠} \times ك}{\text{مجـ ك}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٨٥,٥}{٥٠} \times ١٠٠ = ١٧١\%$$

أي أن تكاليف البناء فى عام ٢٠٠٠ قد زادت بنسبة ٧١% عما كانت عليه عام ١٩٩٥ .

ملحوظة : ماذا لو تم إيجاد الرقم القياسي بدون ترجيح .

الحل

$$\text{الرقم القياسي للمناسيب (كوسط حسابي)} = \frac{\frac{\text{مجـ } ع_١}{\text{مجـ } ع_٠} \times ١٠٠}{ن}$$ **حيث ن عدد المفردات**

$$= \frac{٨٣٣,٣}{٥}$$

$$= ١٦٦,٧\%$$

وهو الرقم مضلل لماذا؟



حـــالــــه (٣)

الجدول التالي يوضح الكميات المباعة وسعر البيع لثلاث سلع فى عـــامي ٢٠٠٠ ، ٢٠٠٣ .

السلع	عام ٢٠٠٠		عام ٢٠٠٣	
	الكمية ($ك_.$)	السعر ($ع_.$)	الكمية ($ك_١$)	السعر ($ع_١$)
أ	١٠٠	١٠	١٥٠	٨
ب	٢٠٠	٦	٢٤٠	٥,٤
جـ	٣٠٠	٥	٣٣٠	٤,٧٥

والمطلوب :

تركيب الرقم القياسي لقيمة المبيعات باعتبار عام ٢٠٠٠ = ١٠٠

الحــــل

الجدول الإحصائى اللازم :

السلع	$ع_١ ك_١$	$ع_. ك_.$
أ	١٢٠٠	١٠٠٠
ب	١٢٩٦	١٢٠٠
جـ	١٥٦٧,٥	١٥٠٠
المجموع	٤٠٦٣,٥	٣٧٠٠

الرقم القياسي لقيمة المبيعات $= \frac{\text{مج ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مج ع. ع.}} \times ١٠٠$

$= \frac{\text{مجموع قيم السلع فى سنة المقارنة}}{\text{مجموع قيم السلع فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$

$= \frac{٤٠٦٣,٥}{٣٧٠٠} \times ١٠٠ = ١٠٩,٨٢\%$

وهذا يعنى أن قيمة المبيعات قدرات بمعدل ٩,٨٢% فى سنة المقارنة عما كانت عليه فى سنة الأساس .

ملحوظة :

لمعرفة سبب هذه الزيادة هل راجعه إلى زيادة الكميات المباعة من السلع أم إلى نقص أسعارها نتبع الآتى :

أ – تركيب الرقم القياسي للأسعار وذلك لمقارنة أسعار سنة المقارنة بأسعار سنة الأساس ، وباستخدام الترجيح بكميات سنة المقارنة (باش) لمعالجة مشكلة التضليل :



∴ الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (باش) =

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1} \times ١٠٠$$

، الجدول الإحصائي اللازم :

السلع	$\text{ع}_1\text{ك}_1$	$\text{ع}_0\text{ك}_1$
أ	١٢٠٠	١٥٠٠
ب	١٢٩٦	١٤٤٠
جـ	١٥٦٧,٥	١٦٥٠
المجموع	٤٠٦٣,٥	٤٥٩٠

$$\therefore \text{ر} = \frac{٤٠٦٣,٥}{٤٥٩٠} \times ١٠٠ = ٨٨,٥\%$$

وهذا يعنى أن الأسعار قد نقصت فى عام المقارنة بمعدل ١١,٥% عمـــا كانت عليه فى سنة الأساس .

ب- تركيب الرقم القياسي للكميات . ذلك لمقارنة الكميات المباعة فى سـنة المقارنة بالكميات المباعة فى سنة الأســـاس ، وباســـتخدام الـــترجيح بأسعار سنة الأساس (لاسبير) لمعالجة مشكلة التضليل :



∴ الرقم القياسي للكميات المرجح بأسعار سنة الأساس (لاسبير) =

$$= \frac{\text{مجـ ك}_1 \text{ ع}_0}{\text{مجـ ك}_0 \text{ ع}_0} \times ١٠٠$$

، الجدول الإحصائي اللازم :

السلع	$ك_1 ع_0$	$ك_0 ع_0$
أ	١٥٠٠	١٠٠٠
ب	١٤٤٠	١٢٠٠
جـ	١٦٥٠	١٥٠٠
المجموع	٤٥٩٠	٣٧٠٠

$$\therefore \text{ر} = \frac{٤٥٩٠}{٣٧٠٠} \times ١٠٠ = ١٢٤,١\%$$

وهذا يعنى أن الكميات المباعة من السلع قد زادت بمعــدل ٢٤,١% فــي سنة المقارنة عما كانت عليه فى سنة الأساس .

حـــالـــــه (٤)

الجدول التالي يوضح الكمية المنتجة وتكلفة الوحدة منها لشـــركتين أ ، ب يقومان بإنتاج سلعة ما فى عامى ٢٠٠٠ ، ٢٠٠٣ .



الشركة	٢٠٠٠			٢٠٠٣		
	الكمية (ك.)	تكلفة الوحدة (ت.)	% للشركة فى الإنتاج	الكمية (ك١)	تكلفة الوحدة (ت١)	% للشركة فى الإنتاج
أ	٤٠٠	٦	%٨٠	٣٠٠	٥,٧	%٥٠
ب	١٠٠	٥	%٢٠	٣٠٠	٤,٥	%٥٠
الجملة	٥٠٠	/	%١٠٠	٦٠٠	/	%١٠٠

والمطلوب :

تركيب الرقم القياسي لمتوسط تكلفة الإنتاج باعتبار عام ٢٠٠٠ = ١٠٠

الحـــــل

الرقم القياسي لمتوسط تكلفة الإنتاج = $\frac{\text{متوسط تكلفة الوحدة فى سنة المقارنة}}{\text{متوسط تكلفة الوحدة فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$

$$= \frac{\frac{\text{مج ك}_١ \text{ت}_١}{\text{مج ك}_١}}{\frac{\text{مج ك. ت.}}{\text{مج ك.}}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{\frac{(٤,٥ \times ٣٠٠) + (٥,٧ \times ٣٠٠)}{٦٠٠}}{\frac{(٥ \times ١٠٠) + (٦ \times ٤٠٠)}{٥٠٠}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥,١}{٥,٨} \times ١٠٠ = \%٨٧,٩$$



وهذا يعنى أن متوسط تكلفة الإنتاج قد نقصت بمعدل ١٤,١% فـــى ســنة المقارنة عما كانت عليه فى سنة الأساس .

ملحوظة :

لمعرفة السبب فى هذا النقص هل راجع إلى نقص فى تكلفة الوحدة أم إلـى تغير فى هيكل[1] نتبع الأتي :

أ- أثر نقص التكلفة $= \dfrac{\text{متوسط تكلفة الوحدة فى سنة المقارنة}}{\text{متوسط تكلفة الوحدة فى سنة الأساس لكن بهيكل المقارنة}} \times ١٠٠$

$$= \dfrac{\dfrac{\text{مجـ ك}_١ \text{ت}_١}{\text{مجـ ك}_١}}{\dfrac{\text{مجـ ك}_١ \text{ت}_.}{\text{مجـ ك}_١}} \times ١٠٠$$

$$= \dfrac{٥,١}{\dfrac{(٥\times٣٠٠)+(٦\times٣٠٠)}{٦٠٠}} \times ١٠٠$$

$$= \dfrac{٥,١}{٥,٥} \times ١٠٠ = ٩٢,٧\% \ .$$

---

[1] التغير فى هيكل الإنتاج يعنى التوسع فى الشركة ذات التكلفة الأقل ، وتقليل إنتاج الشركة ذات التكلفة الأعلى .

وهذا يعنى أن نقص تكلفة الوحدة قد تسبب فى نقص متوسط تكلفة الوحدة المنتجة بمعدل ٧,٣% فى سنة المقارنة عما كانت عليه فى سنة الأساس .

ب- أثر تغيير الهيكل $= \dfrac{\text{متوسط تكلفة الوحدة فى سنة المقارنة لكن بتكلفة الأساس}}{\text{متوسط تكلفة الوحدة فى سنة الأساس}} \times ١٠٠$

$$= \dfrac{\dfrac{\text{مج ك}_{١}\ \text{ت}_{.}}{\text{مج ك}_{١}}}{\dfrac{\text{مج ك}_{.}\ \text{ت}_{.}}{\text{مج ك}_{.}}} \times ١٠٠$$

$$= \dfrac{٥.٥}{\dfrac{(٥ \times ١٠٠)+(٦ \times ٤٠٠)}{٥٠٠}} \times ١٠٠$$

$$= \dfrac{٥.٥}{٥,٨} \times ١٠٠ \quad = ٩٤,٨\% \ .$$

وهذا يعنى أن متغير الهيكل قد تسبب فى نقص تكلفة الوحدة المنتجة بمعدل قدرة ٥,٢% .



حـــالـــــة (٥)

إذا كان المستهدف فى خطة شـــركة نقـــل ســـياحي هـــو القيـــام بالانتقالات الداخلية لعدد ٥٠٠٠٠ سائح فى شهر ما ، وقد تبين أن الشركة قد قامت بهذا العمل لعدد ٦٠٠٠٠ سائح ، فما هو الرقم القياســـي لتنفيـــذ الخطة .

الحــــل

$$\text{الرقم القياسي لتنفيذ الخطة} = \frac{\text{الفعلي}}{\text{الوارد بالخطة}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٦٠٠٠٠}{٥٠٠٠٠} \times ١٠٠$$

$$= ١٢٠\%$$

أي أن الخطة تم تنفيذها مع زيادة قدرها ٢٠%

حـــالـــــة (٦)

البيانات التالية تمثل متوسط آجر العامل فى أربـــع فنـــادق فـــى عـــامى ٢٠٠٠، ٢٠٠٣ .

الفندق	٢٠٠٠		٢٠٠٣	
	متوسط أجر العامل	عدد العمال	متوسط أجر العامل	عدد العمال
أ	٢٤	٦	٣٠	٨
ب	٣٢	٢	٣٨	١٣
جـ	٤١	٤	٤٥	٧
ء	٢٧	٥	٣٥	٦

والمطلوب :

١-أوجد الرقم القياسي الأمثل لمتوسط أجر العامل باعتبار عام ٢٠٠٠=١٠٠ .

٢-إذا علمت أن الرقم القياسي لنفقة المعيشة عام ٢٠٠٠ = ١٢٤ فما هو التغير الحقيقي فى مستوى أجور العمال .

$$\text{ر (لاسبير)} = \frac{\text{مج} (٣٠\times٦ + ٣٨\times٢ + ٤٥\times٤ + ٣٥\times٥)}{\text{مج} (٢٤\times٦ + ٣٢\times٢ + ٤١\times٤ + ٢٧\times٥)} \times ١٠٠$$

$$= ١٠٩,٦\%$$

$$\text{ر (باش)} = \frac{\text{مج} (٣٠\times٨ + ٣٨\times١٣ + ٤٥\times٧ + ٣٥\times٦)}{\text{مج} (٢٤\times٨ + ٣٢\times١٣ + ٤١\times٧ + ٢٧\times٦)} \times ١٠٠$$

$$= ١١٩\%$$



ر فيشر = $\sqrt{109.6 \times 119}$ = ١١٤,٣%

وهذا يعنى زيادة متوسط أجر العمال بمعدل ١٤,٣% فى سنة المقارنة عما كانت عليه فى سنة الأساس .

، الرقم القياسي للأجور الحقيقية = $\frac{\text{الرقم القياسي للأجور}}{\text{الرقم القياسي لنفقة المعيشة}} \times 100$

$= \frac{114.3}{124} \times 100$

= ٩٢%

وهذا يعنى نقص فى متوسط الأجر للعمال فى عام ٢٠٠٣ عما كان عليه فى عام ٢٠٠٠ ، والنقص بمعدل ٨% .

حالة (٧)

الجدول التالي يوضح الإيرادات السياحية بالمليون جنيه خلال الفترة ١٩٩٩/٢٠٠٠ .



٢٠٠٣	٢٠٠٢	٢٠٠١	٢٠٠٠	١٩٩٩	السنوات
٩٣١	٨٢٦	٥٩٨	٢٧٦	٣١٠	الإيرادات السياحية

والمطلوب :

١-أوجد الرقم القياسي لتطور الظاهرة سنة بعد أخرى (الأساس المتحرك)

٢-أوجد الرقم القياسي لتطور الظاهرة بالنسبة لسنة ١٩٩٩ (الأساس الثابت) .

الحـــل

١- باستخدام الأساس المتحرك :

السنوات	الإيرادات	الرقم القياسي	ملاحظات
١٩٩٩	٣١٠	–	
٢٠٠٠	٢٧٦	٨٩ (١)	نقص بمقدار ١١%
٢٠٠١	٥٩٨	٢١٦,٦	زيادة بمقدرا ١١٦,٦%
٢٠٠٢	٨٢٦	١٣٨	زيادة بمقدار ٣٨%
٢٠٠٣	٩٣١	١١٣	زيادة بمقدار ١٣%

(١) ٨٩% = $\frac{٢٧٦}{٣١٠}$ × ١٠٠ ، ...... هكذا



٢- باستخدام الأساس الثابت :

السنوات	الإيرادات	الرقم القياسي	ملاحظات
١٩٩٩	٣١٠	-	
٢٠٠٠	٢٧٦	٨٩	نقص بمقدار ١١%
٢٠٠١	٥٩٨	١٩٣	زيادة بمقدرا ٩٣%
٢٠٠٢	٨٢٦	٢٦٧	زيادة بمقدار ١٦٧%
٢٠٠٣	٩٣١	٣٠٠	زيادة بمقدار ٢٠٠%



الجداول الإحصائية

جدول أ : المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي

Areas of a Standard Normal distribution

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3	.0013									
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0227	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1232	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1921	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641



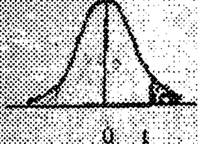
جدول 1 تابع المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي

Areas of a Standard Normal distribution

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9663	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	0.9987									

جدول II: توزيع ت

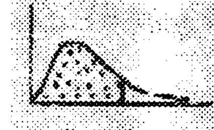
Student's t Distribution



ν \ α	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

جدول III: توزيع مربع كاي

The χ^2 distribution



χ^2

	Pr (x ≤ x)					
V	0.01	0.025	0.050	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.103	5.99	7.38	9.21
3	0.115	0.216	0.216	7.81	9.35	11.30
4	0.297	0.484	0.711	9.49	11.10	13.30
5	0.554	0.831	1.15	11.10	12.80	15.10
6	0.872	1.24	1.64	12.60	14.40	16.80
7	1.24	1.69	2.17	14.10	16.00	18.50
8	1.65	2.18	2.73	15.50	17.50	20.10
9	2.09	2.70	3.33	16.90	19.00	21.70
10	2.56	3.25	3.94	18.30	20.50	23.20
11	3.05	3.82	4.57	19.70	21.90	24.70
12	3.57	4.40	5.23	21.00	23.30	26.20
13	4.11	5.01	5.89	22.40	24.70	27.70
14	4.66	5.63	6.57	23.70	26.10	29.10
15	5.23	6.26	7.26	25.00	27.50	30.60
16	5.81	6.91	7.96	26.30	28.80	32.00
17	6.41	7.56	8.67	27.60	30.20	33.40
18	7.01	8.23	9.39	28.90	31.50	34.80
19	7.63	8.91	10.10	30.10	32.90	36.20
20	8.26	9.59	10.90	31.40	34.20	37.60
21	8.90	10.30	11.60	32.70	35.50	38.90
22	9.54	11.00	12.30	33.90	36.80	40.30
23	10.20	11.70	13.10	25.20	38.10	41.60
24	10.90	12.40	13.80	36.40	39.40	43.00
25	11.50	13.10	14.60	37.70	40.60	44.30
26	12.20	13.80	15.40	38.90	41.90	45.60
27	12.90	14.60	16.20	40.10	43.20	47.00
28	13.60	15.30	16.90	41.30	44.50	48.30
29	14.30	16.00	17.70	42.60	45.70	49.60
30	15.00	16.80	18.50	43.80	47.00	50.90

جدول IV: توزيع ف (٥٪)

F distribution (5%)

0 F

0.05 Significance Level									
V2/V1	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	234.9	249.0	254.3
2	18.5	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.5	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.5
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.6	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.5	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.8
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
28	4.2	3.3	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0



جدول IV: توزيع ف (١٪)

F distribution (1%)

0.01 Significance Level										
V2/V1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.4	99.3	99.4	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.5	27.1	26.6	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	14.8	14.4	13.9	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.3	9.9	9.5	9.0
6	13.7	10.9	9.8	9.2	8.8	8.5	8.1	7.7	7.3	6.9
7	12.3	9.5	8.5	7.9	7.5	7.2	6.8	6.5	6.1	5.7
8	11.3	8.7	7.6	7.0	6.6	6.4	6.0	5.7	5.3	4.9
9	10.5	8.0	7.0	6.4	6.1	5.8	5.5	5.1	4.7	4.3
10	10.0	7.6	6.6	6.0	5.6	5.4	5.1	4.7	4.3	3.9
11	9.7	7.2	6.2	5.7	5.3	5.1	4.7	4.4	4.0	3.6
12	9.3	6.9	6.0	5.4	5.1	4.8	4.5	4.2	3.8	3.4
13	9.1	6.7	5.7	5.2	4.9	4.6	4.3	4.0	3.6	3.2
14	8.9	6.5	5.6	5.0	4.7	4.5	4.1	3.8	3.4	3.0
15	8.7	6.4	5.4	4.9	4.6	4.3	4.0	3.7	3.3	2.9
16	8.5	6.2	5.3	4.8	4.4	4.2	3.9	3.6	3.2	2.8
17	6.4	6.1	5.2	4.7	4.3	4.1	3.8	3.5	3.1	2.7
18	8.3	6.0	5.1	4.6	4.3	4.0	3.7	3.4	3.0	2.6
19	8.2	5.9	5.0	4.5	4.2	3.9	3.6	3.3	2.9	2.5
20	8.1	5.9	4.9	4.4	4.1	3.9	3.6	3.2	2.9	2.4
22	7.9	5.7	4.8	4.3	4.0	3.8	3.5	3.1	2.8	2.3
24	7.8	5.6	4.7	4.2	3.9	3.7	3.3	3.0	2.7	2.2
26	7.7	5.5	4.6	4.1	3.8	3.6	3.3	3.0	2.6	2.1
28	7.6	5.5	4.6	4.1	3.8	3.5	3.2	2.9	2.5	2.1
30	7.6	5.4	4.5	4.0	3.7	3.5	3.2	2.8	2.5	2.0
40	7.3	5.2	4.3	3.8	3.5	3.3	3.0	2.7	2.3	1.8
60	7.1	5.0	4.1	3.7	3.3	3.1	2.8	2.5	2.1	1.6
120	6.9	4.8	4.0	3.5	3.2	3.0	2.7	2.3	2.0	1.4
∞	6.6	4.6	3.8	3.3	3.0	2.8	2.5	2.2	1.8	1.0



الفهـــرس



تابع الفهـــرس

رقم الصفحة	الموضـــوع
	الباب الرابع
	الســـلاســـل الزمنيـــة
٢٢١	– تعريف السلسلة الزمنيـــة (اللفظـــى ، الريـــاضى ، البيانى)
٢٢٤	– عناصر السلسلة الزمنية (الاتجاه العام ، الموسمية ، الدورية ، العرضية)
٢٢٨	– نماذج تحليل السلسلة الزمنية .
٢٢٩	– تحليل السلسلة الزمنية وفقا للنموذج الضربي .
	الباب الخامس
	الأرقام القياسية
٢٦٠	– تعريف الرقم القياسي
٢٦١	– استخدامات الأرقام القياسية .
٢٦٢	– صيغ (طرق تركيب) الأرقام القياسية ك
٢٧٦	– مشاكل تركيب الأرقام القياسية .
٢٧٧	– بعض الأرقام القياسية الشائعة .
٢٧٩	– تطبيقـــــــات .



تابع الفهرس

رقم الصفحة	الموضوع
	الباب الرابع
	السلاسل الزمنية
٢٢١	تعريف السلسلة الزمنية (الفعلي ، الاستثنائي ، البياني)
٢٢٤	مكونات السلسلة الزمنية (الاتجاه العام ، الموسمية ، الدورية ، العرضية)
٢٢٨	طرق تحليل السلسلة الزمنية .
٢٢٩	تحليل السلسلة الزمنية وفقا للنموذج الضربي .
	الباب الخامس
	الأرقام القياسية
٢٣٠	تعريف الأرقام القياسية
٢٣١	استخدامات الأرقام القياسية .
٢٣٢	طرق حساب الأرقام القياسية (طريقة تجميعية) بسيطة
٢٧٣	مشاكل تركيب الأرقام القياسية
٢٧٧	بعض الأرقام القياسية الشائعة .
٢٧٩	تطبيقات .

رقم الإيداع بدار الكتب المصرية
٢٠٠٥/٣٦ ٥٧ م
الترقيم الدولى I.S.B.N